«تابع»

مفهوم تابع

دو مجموعه غیر تهی B و A را در نظر بگیرید همان‌طوری که در بحث مجموعه‌ها داریم، حاصلضرب دکارتی این دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

به هر زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی $A\times B$ که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای عضو اول یکسان نمی‌باشد یک تابع از مجموعه A در مجموعه B گفته می‌شود.

نکته: از نقطه نظر هندسی نموداری توصیف کننده یک تابع است که هر خط به موازات محور y ها شکل آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نکته : رابطه‌ای مانند $H(x,y)=0$ زمانی مبین یک تابع است که به ازای هر x دلخواه حداکثر یک مقدار برای y تولید کند.

مثال: کدام از رابطه های زیر بیان کننده یک تابع است؟

حل:

الف) $y=x^2+\sqrt{x}-1 \longrightarrow$ تابع است

ب) $y=x^3+\sqrt{x} \longrightarrow$ تابع است

ج) $y=x\pm\sqrt{x} \longrightarrow$ تابع نیست

د) $y^2=x-3 \longrightarrow$ تابع نیست

م) $y^3=|x|-x^2 \longrightarrow$ تابع است

ن) $x^2+y^2=10 \longrightarrow$ تابع نیست

و) $|y|=6x+3 \longrightarrow$ تابع نیست

هـ) $\lfloor y\rfloor=x^3+1 \longrightarrow$ تابع نیست

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{-1,2,3\}$ باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر توصیف کننده یک تابع از مجموعه A در مجموعه B است؟

الف) $f=\{(1,2),(2,3),(1,-1)\}$ ج) هر دو

ب) $g=\{(2,3),(-1,2)\}$ د)هیچکدام

حل: مجموعه f تابع نمی‌باشد زیرا دو زوج مرتب آن دارای عضو اول یکسان است.

مجموعه g بخودی خود تابع است ولی تابعی از A برروی B نمی باشد زیرا: $(-1,2)\notin A\times B$ پس گزینه (د) صحیح می‌باشد.

مثال: تابع $f=\{(x,y)\,|\,xy+y-8=0, x,y\in N\}$ دارای چند عضو است؟

حل:

$$yx+y-8=0\Rightarrow y(1+x)=8\ \Rightarrow y=\frac{8}{1+x}$$

$$f=\{(1,4),(3,2),(7,1)\}$$

پس f دارای سه عضو است.

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که مجموعه $k=\{(2,4),(-1,4),(2,a),(3,1)\}$ یک تابع باشد.

حل:

اگر بخواهیم k یک تابع باشد باید دو زوج مرتب $(2,a)$ و $(2,4)$ که عضو اولشان یکسان است دارای عضو دوم برابر باشند یعنی $a=4$ باشد. در این صورت $(2,4)$ تکراری می‌شود.

یادآوری:

قدر مطلق:

$$|A|=\begin{cases}+A & A\geq 0\\ -A & A<0\end{cases}$$

به موارد زیر توجه کنید:

$$x^2=k^2\Rightarrow |x|=k\Rightarrow x=\pm k$$
$$x^2>k^2\Rightarrow |x|>k\Rightarrow x>k \text{ یا } x<-k$$
$$x^2<k^2\Rightarrow |x|<k\Rightarrow -k<x<k$$

جزءصحیح:

برای هر عدد حقیقی x یک عدد صحیح نسبی مانند n یافت می‌شود بطوریکه:

$$\lfloor x\rfloor=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1$$

به خاطر داشته باشید:

① $\forall x\in R\ ,\ 0\leq x-\lfloor x\rfloor<1$

② $\forall x\in R\ ,\ \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & ,\ x\in z\\ -1 & ,\ x\notin z\end{cases}$

③ اگر $P\in z:\lfloor x+P\rfloor=\lfloor x\rfloor+P$

لگاریتم:

مطابق تعریف اگر $a>0$ ، $b>0$ و $b\neq 1$ باشد داریم:

$\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a$

بخاطر داشته باشید اگر $m,n>0$ و $b>0$ و $b\neq 1$ داریم:

① $\log_b^{(m.n)} = \log_b^m + \log_b^n$

② $\log_b^{m/n} = \log_b^m - \log_b^n$

③ $\log_b^{m^k} = k\log_b^m$

④ $\log_{b^k}^m = \frac{1}{k}\log_b^m$

⑤ $\log_n^m = \frac{\log_b^m}{\log_b^n}$

⑥ $\log_b^b = 1$

⑦ $\log_b^1 = 0$

⑧ $\log^m = \log_{10}^m$

⑨ $\log_e^m = \ln m$

⑩ $\log_b^m < \log_b^n \Rightarrow \begin{cases} m>n & ,\ 0<b<1 \quad \text{اگر} \\ m<n & ,\ b>1 \quad \text{اگر} \end{cases}$

⑪ $b^m < b^n \Rightarrow \begin{cases} m>n & ,\ 0<b<1 \quad \text{اگر} \\ m<n & ,\ b>1 \quad \text{اگر} \end{cases}$

دامنه تابع $y=f(x)$

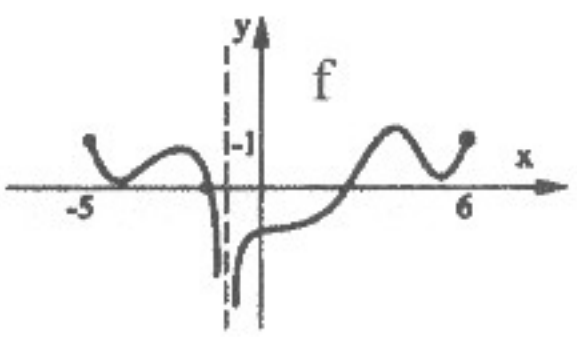
دامنه تابع $y=f(x)$ مجموعه‌ای از تمام x هایی است که می‌توان در داخل ضابطه f قرار داد بدون آنکه به مشکل محاسباتی در مجموعه اعداد حقیقی بر خورد کنیم.

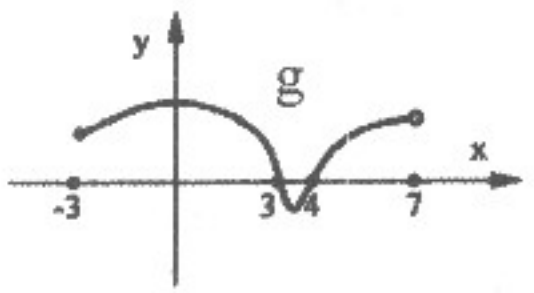
به عنوان مثال صفر شدن مخرج یک کسر و یا منفی شدن زیر رادیکال با فرجه زوج در مجموعه اعداد حقیقی مجاز نمی‌باشد و مشکل محاسباتی شمرده می‌شود.

نکته : اگر دامنه تابع $f(x)$ را با D_f و دامنه تابع $g(x)$ را با D_g نمایش دهیم داریم:

$$\begin{cases} D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ D_{f.g} = D_f \cap D_g \end{cases} \quad , \quad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$$

مثال : نمودار دو تابع f و g به صورت زیر می‌باشد، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.





حل:

$$D_f = [-5,-1) \cup (-1,6]$$
$$D_g = [-3,7)$$
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$
$$D_{f/g} = [-3,-1) \cup (-1,6] - \{3,4\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{4x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{3+2x}$

حل:

چون فرجه $\sqrt[3]{4x+1}$ فرد است پس هیچ محدودیتی نداشته و دامنه آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$$2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$
$$3+2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$$
پس $$D_f = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x^2-4}$

حل:

$$\begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 \longrightarrow 1 \leq x \leq 3 \\ x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$-x^2+4x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow$$

x		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

پس $$D_f = [1,3] - \{2\} = [1,2) \cup (2,3]$$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2-1)(x^2+x-2)}{x^2-9}}$

حل:

برای تعیین علامت عبارت زیر رادیکال نخست صورت و مخرج آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2,1$$
$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

حال یک جدول تعیین علامت رسم کرده و در بالای آن تمام ریشه‌های بدست آمده را به ترتیب صعودی می‌نویسیم. (طبیعی است عبارت مورد نظر در ریشه های صورت برابر صفر و در ریشه‌های مخرج بی‌نهایت می‌شود) کافی است برای تعیین علامت آن یک عدد دلخواه بین دو ریشه بدهیم تا بتوانیم عبارت مورد نظر را از حیث مثبت و منفی بودن ارزیابی کنیم.

x		-3		-2		-1		1		3	
$f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2+x-2)}{x^2-9}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	$\nexists$	$+$

پس $D_f=(-\infty,-3)\cup[-2,-1]\cup(3,+\infty)\cup\{1\}$

د) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+5x+4}{(x+2)^3(3-x)^2}}$

حل:

$$\begin{cases}A=\frac{x^2+5x+4}{(x+2)^3(3-x)^2}\geq 0\\(x+2)^3(3-x)^2\neq 0\end{cases}$$

$x^2+5x+4=0 \Rightarrow x=-1,-4$ ریشه‌های مرتبه اول

$(x+2)^3(3-x)^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-2 & \text{ریشه مرتبه سوم}\\x=3 & \text{ریشه مرتبه دوم}\end{cases}$

x		-4		-2		-1		3	
A	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

پس $D_f=[-4,-2)\cup[-1,3)\cup(3,+\infty)$

مثال: می‌دانیم دامنه تابع $f(x)$ ، $[-1,2)$ است دامنه تابع $f(3-2x)$ را بیابید

حل:

در تابع $f(x)$ ، x هایی که در بازه $[-1,2)$ قرار دارد قابل قبول است یعنی $-1\leq x<2$ پس در تابع $f(3-2x)$ خواهیم داشت:

$$-1\leq 3-2x<2 \Rightarrow -4\leq -2x<-1 \Rightarrow \frac{1}{2}<x\leq 2$$

$$D_f=\left(\frac{1}{2},2\right]$$

مثال: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{|2x-1|-3}$

حل:

$$|2x-1|-3\geq 0 \Rightarrow |2x-1|\geq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 3 \Rightarrow 2x\geq 4 \Rightarrow x\geq 2 \\ \text{یا} \\ 2x-1\leq -3 \Rightarrow 2x\leq -2 \Rightarrow x\leq -1 \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{|2x+3|-1}+\dfrac{1}{|x|+3}$

حل:

$$\begin{cases} |2x+3|-1=0 \Rightarrow |2x+3|=1 \\ |x|+3=0 \Rightarrow |x|=-3 \text{ غیر ممکن} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=1 \Rightarrow x=-1 \\ 2x+3=-1 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

در کل داریم :

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,-2\}$$

ج) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|2x|}}$

حل:

برای معین بودن f باید: $x-|2x|>0$

$$\begin{cases} x\geq 0 \text{ اگر} \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow |2x|=2x \Rightarrow x-2x>0 \Rightarrow -x>0 \text{ غیر ممکن} \\ x<0 \text{ اگر} \Rightarrow 2x<0 \Rightarrow |2x|=-2x \Rightarrow x+2x>0 \Rightarrow 3x>0 \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

پس در کل داریم: $D_f=\phi$

د) $f(x)=\sqrt{3x-|x+4|+1}$

حل:

پس باید عبارت $3x-|x+4|+1$ را تعیین علامت کنیم:

$$3x-|x+4|+1=0$$

اگر $x\geq -4 \Rightarrow 3x-x-4+1=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

اگر $x<-4 \Rightarrow 3x+x+4+1=0 \Rightarrow 4x=-5 \Rightarrow x=-\dfrac{5}{4}$

این عدد غیر قابل قبول است زیرا شرط ما $x<-4$ بوده.

x		$\frac{3}{2}$	
$3x-\lvert x+4\rvert+1$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow D_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$$

ن) $f(x)=\sqrt{|x|-x^2}$

حل:

باید برای معین بودن f داشته باشیم:

$$|x|-x^2\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x>0 \Rightarrow x-x^2\geq 0 \Rightarrow x(1-x)\geq 0 \\ \qquad \text{چون } x>0 \text{ است پس باید } 1-x\geq 0 \text{ لذا: } 0<x\leq 1 \\ \text{اگر } x=0 \Rightarrow 0-0^2\geq 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \\ \text{اگر } x<0 \Rightarrow -x-x^2\geq 0 \Rightarrow -x(1+x)\geq 0 \\ \qquad \text{چون } x<0 \text{ پس } 0<-x \text{ و باید } 1+x\geq 0 \text{ لذا: } 0>x\geq -1 \end{cases}$$

در کل از اجتماع جوابهای بدست آمده می‌توان گفت:

$$D_f=[-1,1]$$

مثال: دامنه تابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{2x+3}{\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\lfloor 2x\rfloor+3}$

حل:

$$\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=\frac{1}{2} \quad \text{غیرممکن}$$

$$\lfloor 2x\rfloor=-3 \Rightarrow -3\leq 2x<-2 \Rightarrow \frac{-3}{2}\leq x<-1$$

پس می‌توان گفت:

$$D_f=R-\left[\frac{-3}{2},-1\right) \text{ یا } D_f=\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)\cup[-1.+\infty)$$

ب) $f(x)=\sqrt{\lfloor 2x\rfloor-7}+\sqrt{6-\lfloor x\rfloor}$

حل:

$$\lfloor 2x\rfloor-7\geq 0 \Rightarrow \lfloor 2x\rfloor\geq 7 \Rightarrow 2x\geq 7 \Rightarrow x\geq\frac{7}{2}$$

$$6-\lfloor x\rfloor\geq 0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor\leq 6 \Rightarrow x<7$$

$$\text{پس } D_f=\left[\frac{7}{2},7\right)$$

ج) $f(x)=\dfrac{1}{\lfloor|x|\rfloor-1}$

حل:

$$\lfloor|x|\rfloor-1=0 \Rightarrow \lfloor|x|\rfloor=1 \Rightarrow 1\leq|x|<2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \quad x\neq -1 \\ |x|<2 \Rightarrow -2<x<2 \end{cases}$$

پس دو نا معادله زیر تواماً برقرار است.

اشتراک دو نامعادله فوق می شود:

$$(-2,-1]\cup[1,2)$$

و در کل داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{(-2,-1] \cup [1,2)\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را معین کنید.

الف) $f(x) = \log_{(10-x)}^{(\sqrt{x}-2)}$

حل:

① $\sqrt{x}-2>0 \Rightarrow \sqrt{x}>2 \Rightarrow x>4$

② $10-x>0 \Rightarrow 10>x \Rightarrow x<10$

③ $10-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 9$

پس داریم:

$$D_f = (4,10) - \{9\}$$

ب) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{\ln(x+2)}$

حل:

① $x^2-25\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 25 \Rightarrow |x|\geq 5 \Rightarrow x\geq 5$ یا $x\leq -5$

② $\ln(2+x)\neq 0 \Rightarrow x+2\neq 1 \Rightarrow x\neq -1$

③ $2+x>0 \Rightarrow x>-2$

پس دامنه تابع چنین است:

$$D_f = [5,+\infty)$$

ج) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-\log_2^x}}{e^{x^2-x}-1}$

حل:

① $4-\log_2^x\geq 0 \Rightarrow \log_2^x\leq 4 \Rightarrow \log_2^x\leq 4\log_2^2 \Rightarrow \log_2^x\leq \log_2^{2^4} \Rightarrow x\leq 2^4 \Rightarrow x\leq 2^4 \Rightarrow x\leq 16$

② $x>0$

③ $e^{x^2-x}-1\neq 0 \Rightarrow e^{x^2-x}\neq 1 \Rightarrow x^2-x\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

و در کل می‌توان نوشت:

$$D_f = (0,16] - \{1\}$$

د) $f(x) = \sqrt{\log_3^{\log_{\frac{1}{2}}^x}}$

حل:

① $x>0$

② $\log_{\frac{1}{2}}^{x}>0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x}>\log_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow x<1$

③ $\log_{3}^{\log_{\frac{1}{2}}^{x}} \geq 0 \Rightarrow \log_{3}^{\log_{\frac{1}{2}}^{x}} \geq \log_{3}^{1} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x} \geq 1$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x} \geq \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

داریم :

$$D_f = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

هـ) $f(x)=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}}^{\ln x}}$

حل:

① $x>0$

② $\ln x>0 \Rightarrow \ln x>\ln 1 \Rightarrow x>1$

③ $1-\log_{\frac{1}{2}}^{\ln x} \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\ln x} \leq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\ln x} \leq \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \ln x \geq \ln e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x \geq \sqrt{e}$$

پس خواهیم داشت:

$$D_f = \left[\sqrt{e}, +\infty\right)$$

نکته: به موارد زیر توجه کنید:

$f(x)=\sin x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f(x)=\cos x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f(x)=\tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, k \in z$

$f(x)=\cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi\}, k \in z$

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arc}\sin x \\ f(x)=\text{Arc}\cos x \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1,1]$$

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arc}\tan x \\ f(x)=\text{Arc}\cot x \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

مثال: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{1-|x|}}$

حل:

$1-|x|\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$4-\sqrt{1-|x|}\geq 0 \Rightarrow 4\geq\sqrt{1-|x|} \Rightarrow 16\geq 1-|x| \Rightarrow |x|\geq -15$ → همواره برقرار است

$D_f=[-1,1]$

ب) $f(x)=\text{Arc}\sin\left(\log\frac{x}{2}\right)$

حل:

$x>0$

$-1\leq\log\frac{x}{2}\leq 1 \Rightarrow \log_{10}^{10^{-1}}\leq\log\frac{x}{2}\leq\log_{10}^{10} \Rightarrow \frac{1}{10}\leq\frac{x}{2}\leq 10 \Rightarrow \frac{1}{5}\leq x\leq 20$

$D_f=\left[\frac{1}{5},20\right]$

ج) $f(x)=\sqrt{1-2\cos x}$

حل:

$1-2\cos x\geq 0 \Rightarrow \cos x\leq\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5\pi}{3}$

$D_f=2k\pi+\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$

د) $f(x)=\cot x-\tan x$

حل: د)

$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}$

$\begin{cases}\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{x\mid x=k\pi\,,\,k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

برد تابع $y=f(x)$

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید دامنه آن را یافته ایم، چنانچه مقادیر x موجود در دامنه را درون ضابطه f قرار داده و مقادیر حاصله برای y را در مجموعه ای جمع کنیم به مجموع حاصله برد تابع مورد نظر گفته می‌شود.

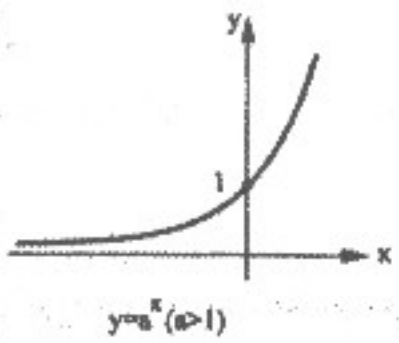
برای پیدا کردن برد یک تابع معمولاً از یکی از روشهای زیر استفاده می کنیم:

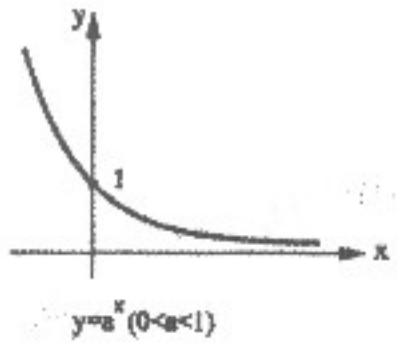
۱- تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید چنانچه بتوانیم x را برحسب y پیدا کنیم به رابطه‌ای مانند $x=H(y)$ می‌رسیم، حال می‌توان ادعا کرد محدودیتهای y (دامنه y) در عبارت $H(y)$ برد تابع اصلی را مشخص می کند (البته با توجه به شرایط مسئله).

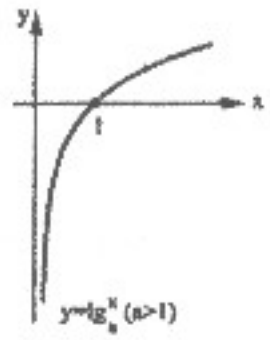
۲- در برخی مواقع با استفاده از مشتق و بحث اکسترممهای مطلق یک تابع می‌توان برد آن را پیدا کرد.

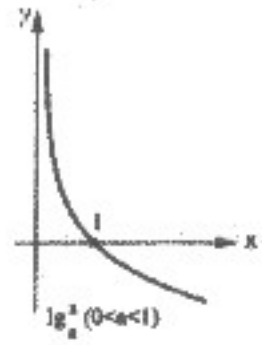
۳- در برخی مسائل با استفاده از یک سری بیانهای نامساوی وار دقیقاً می‌توان ضابطه تابع را تولید کرده و روی برد تابع اظهار نظر کرد.

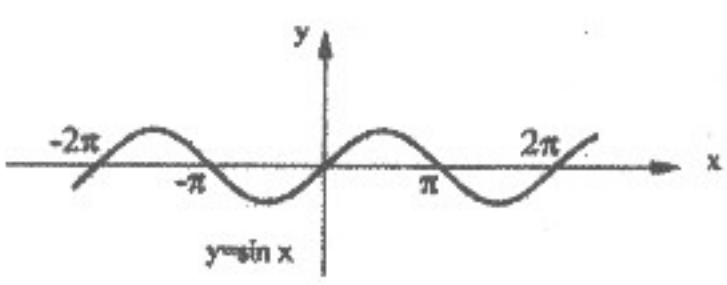
۴- از آنجا که برد یک تابع محدوده تغییرات ممکنه برای y را نشان می‌دهد، لذا چنانچه بتوان در مساله‌ای نمودار تابعی را بطور کیفی رسم کنیم به سادگی می‌توان برد تابع را از روی شکل تعیین کرد.

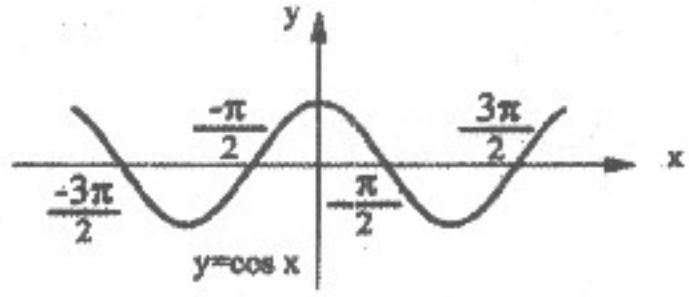


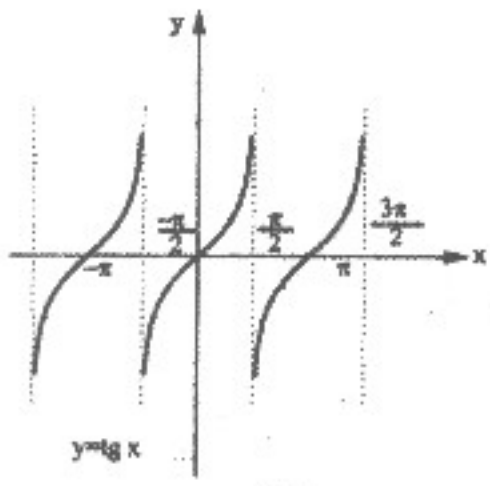


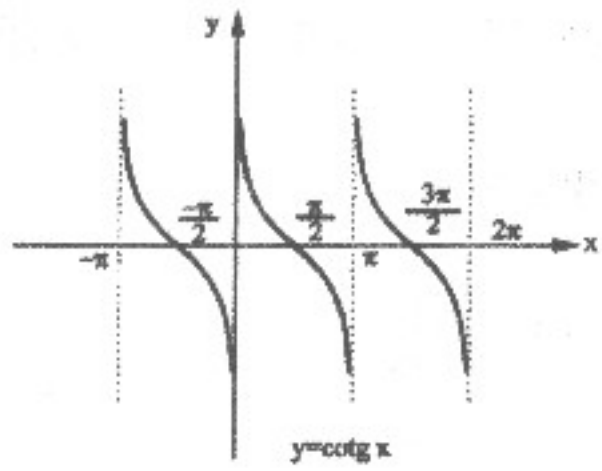


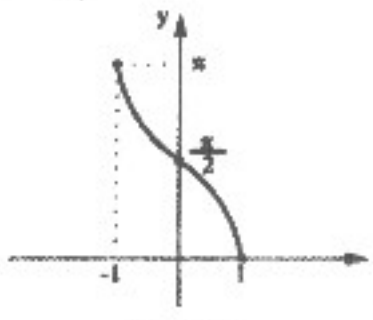


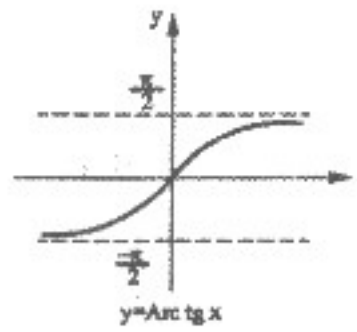


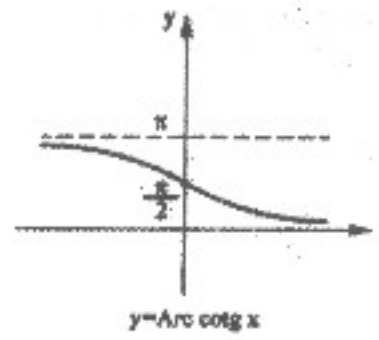


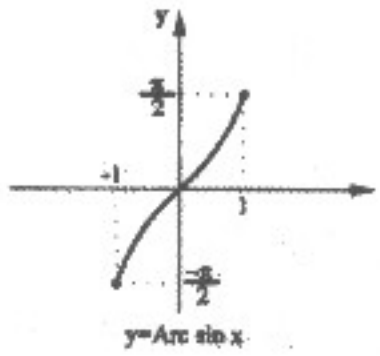












مثال: دامنه و برد توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $y = x^2 + 3x + 1$

حل:

بدیهی است که $D_f = \mathbb{R}$

$$y = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 - y = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(1-y)}}{2}$$

به وضوح دیده می‌شود مقادیر مجاز برای y می‌طلبد:

$$9 - 4(1-y) \geq 0 \Rightarrow 9 - 4 + 4y \geq 0 \Rightarrow 4y \geq -5 \Rightarrow y \geq \frac{-5}{4}$$

پس داریم :

$$R_f = \left[\frac{-5}{4}, +\infty\right)$$

ب) $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 17}$

حل:

$$y = 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = 2 + \sqrt{(x+1)^2 + 16}$$

$(x+1)^2 + 16 > 0$ چون $D_f = \mathbb{R}$ پس

$$0 \leq (x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 + 16 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 16} \geq 4$$

پس : $2 + \sqrt{(x+1)^2 + 16} \geq 6$

$$R = [6, +\infty)$$

ج) $f(x) = \frac{2|x| + 1}{3 - |x|}$

حل:

$$3 - |x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq 3 \, , x \neq -3$$

پس $D_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$

$$y=\frac{2|x|+1}{3-|x|}\Rightarrow 3y-y|x|=2|x|+1\Rightarrow 3y-1=|x|(2+y)\Rightarrow |x|=\frac{3y-1}{y+2}\Rightarrow\begin{cases}y+2\neq 0\Rightarrow y\neq -2\\ \frac{3y-1}{y+2}\geq 0\end{cases}$$

y		-2		$\frac{1}{3}$	
$\frac{3y-1}{y+2}$	$+$	∞	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,-2)\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$$

د) $f(x)=3-2\ln(2x+1)$

حل:

$$2x+1>0\Rightarrow x>\frac{-1}{2}\Rightarrow D_f=\left(\frac{-1}{2},+\infty\right)$$

$$y=3-2\ln(2x+1)\Rightarrow \ln(2x+1)=\frac{3-y}{2}\Rightarrow 2x+1=e^{\left(\frac{3-y}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{e^{\left(\frac{3-y}{2}\right)}-1}{2}$$

به وضوح دیده می‌شود که هر مقدار دلخواه برای y مجاز است . پس :

$$R_f=\mathbb{R}$$

م) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-[x]}$

حل:

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}: 0\leq x-[x]<1\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{x-[x]}>\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\Rightarrow 1\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{x-[x]}>\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow R_f=\left(\frac{1}{3},1\right]$$

ن) $f(x)=\frac{2}{5-3\sin x}$

حل:

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}: -1\leq\sin x\leq 1$$

$$\Rightarrow 2\leq 5-3\sin x\leq 8\Rightarrow\frac{2}{8}\leq\frac{2}{5-3\sin x}\leq\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow R_f=\left[\frac{1}{4},1\right]$$

و) $f(x)=\frac{2e^x+1}{3-e^x}$

حل: و)

$3-e^x=0 \Rightarrow e^x=3 \Rightarrow x=\ln 3$

$D_f=\mathbb{R}-\{\ln 3\}$

برای تعیین برد می‌نویسیم :

$$y=\frac{2e^x+1}{3-e^x} \Rightarrow 3y-ye^x=2e^x+1 \Rightarrow 3y-1=e^x(2+y) \Rightarrow e^x=\frac{3y-1}{2+y} \Rightarrow x=\text{Ln}\left(\frac{3y-1}{2+y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3y-1}{2+y}>0 \Rightarrow$$

x		-2		$\frac{1}{3}$	
$\frac{3y-1}{2+y}$	+	∞	−	0	+

$$R_f=(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$$

هـ) $f(x)=\text{Arcsin}\left(x^2+1\right)$

حل:

برای تعیین دامنه f داریم:

$$-1\le x^2+1\le 1$$

$x^2+1\ge -1$ همواره برقرار است

$x^2+1\le 1 \Rightarrow x^2\le 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_f=\{0\}$

پس برد تابع شامل یک عضو است و داریم:

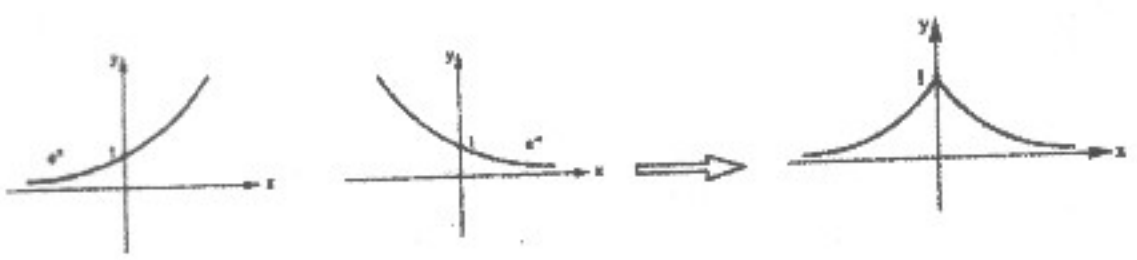
$f(0)=\text{Arcsin}(0+1)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow R_f=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

ی) $f(x)=e^{-|x|}$

حل:

بدیهی است $D_f=\mathbb{R}$

برای یافتن برد $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ e^{x} & x<0\end{cases}$



پس داریم : $R_f=(0,1]$

ترکیب توابع

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نظر بگیرید ترکیب این دو تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$fog(x)=f(g(x)) \ , \ D_{fog}=\{x\,|\,x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

به خاطر داشته باشید:

$(fog)(x)\neq(gof)(x)$

$fo(goh)(x)=(fog)oh(x)$

مثال: توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}\lfloor -x \rfloor & , x<3\\ x^2 & , x\geq 3\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}\frac{2x}{3} & , x<2\\ \lfloor x \rfloor & , x\geq 2\end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $\text{fog}(1)$, $\text{gof}\left(\frac{10}{3}\right)$

حل :

$$g(1)=\frac{2}{3} \Rightarrow \text{fog}(1)=f\left(g(1)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\left\lfloor \frac{-2}{3} \right\rfloor=-1$$

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{9} \Rightarrow \text{gof}\left(\frac{10}{3}\right)=g\left(f\left(\frac{10}{3}\right)\right)=g\left(\frac{100}{9}\right)=\left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor=11$$

مثال: فرض کنید داریم:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{3x}{2x-1}$$

اولاً: دامنه fog راتعیین کنید.

ثانیاً :ضابطه fog راتا حد امکان ساده کنید.

حل:

بدون اینکه ساده سازی کنیم باید همینجا دامنه fog را تعیین کنیم.

$$\text{fog}(x)=\frac{2\left(\frac{3x}{2x-1}\right)+1}{\frac{3x}{2x-1}-3}$$

$$2x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x-1}-3\neq 0 \Rightarrow \frac{3x}{2x-1}\neq 3 \Rightarrow x\neq 2x-1 \Rightarrow x\neq 1$$

پس خواهیم داشت:

$$D_{\text{fog}}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2},1\right\}$$

حال اگر بخواهیم ضابطه fog را ساده کنیم می‌نویسیم:

$$\text{fog}(x)=\frac{\frac{6x+2x-1}{2x-1}}{\frac{3x-6x+3}{2x-1}}=\frac{8x-1}{-3x+3}$$

مثال: مطلوب است محاسبه $f(3x+1)$ در صورتی که داریم :

$$f\left(2+\text{Arc}\sin\left(x^3+1\right)\right)=x$$

حل:

$$2+\text{Arc}\sin\left(x^3+1\right)=t \Rightarrow t-2=\text{Arc}\sin\left(x^3+1\right) \Rightarrow x^3+1=\sin(t-2)$$
$$\Rightarrow x^3=\sin(t-2)-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\sin(t-2)-1}$$
$$\Rightarrow \quad f(t)=\sqrt[3]{\sin(t-2)-1}$$

با تبدیل $t \to 3x+1$ خواهیم داشت:

$$f(3x+1)=\sqrt[3]{\sin(3x-1)-1}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=ax+b$ و $g(x)=x-3$ ، مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$fofog(x)=4x+1$$

حل:

$$fof(x)=f\left(f(x)\right)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$
$$fofog(x)=fof\left(g(x)\right)=a^2(x-3)+ab+b=a^2x-3a^2+ab+b$$

پس داریم:

$$a^2x-3a^2+ab+b=4x+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2=4 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases} \\ -3a^2+ab+b=1 \end{cases}$$
$$\xrightarrow{a=2} -3(4)+2b+b=1 \quad \Rightarrow 3b=13 \Rightarrow b=\frac{13}{3}$$
$$\xrightarrow{a=-2} -3(4)-2b+b=1 \quad \Rightarrow b=-13$$

مسئله دو جواب دارد : $\begin{cases} f(x)=2x+\frac{13}{3} \\ f(x)=-2x-13 \end{cases}$

مثال: ضابطه fog را نوشته و ساده کنید در صورتیکه داشته باشیم:

$$f(x)=4+e^{3x-1} \quad , \quad g(x)=\ln(5x+2)$$

حل:

$$fog(x)=4+e^{3(\ln(5x+2))-1}=4+e^{3\ln(5x+2)}.e^{-1}=4+e^{\ln(5x+2)^3}.\frac{1}{e} \Rightarrow fog(x)=4+\frac{(5x+2)^3}{e}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم : $fog(x)=2x^3+3x-1$ و $f(x)=4x-3$ مطلوب است محاسبه $g(x)$.

حل:

$$f(g(x))=2x^3+3x-1 \Rightarrow 4(g(x))-3=2x^3+3x-1 \Rightarrow$$

$$4(g(x))=2x^3+3x+2 \Rightarrow g(x)=\frac{2x^3+3x+2}{4}$$

مثال: توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f=\{(2,3),(-1,1),(4,1)\} \quad , \quad g=\{(-1,3),(2,0),(1,7)\}$$

مطلوبست محاسبه عبارتهای زیر:

الف) $4f$

حل:

$$4f=\{(2,12),(-1,4),(4,4)\}$$

ب) $3-g$

حل:

$$3-g=\{(-1,3-3),(2,3-0),(1,3-7)\}=\{(-1,0),(2,3),(1,-4)\}$$

ج) $f+g$

حل:

$$f+g=\{(2,0+3),(-1,1+3)\}=\{(2,3),(-1,4)\}$$

د) $\frac{f}{g}$

حل:

$$\frac{f}{g}=\left\{\underbrace{\left(2,\frac{3}{0}\right)}_{\downarrow},\left(-1,\frac{1}{3}\right)\right\} \quad =\left\{\left(-1,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

غیر ممکن است چون مخرجش صفر می‌شود

هـ) fog

حل:

$$fog=\{\ \}=\phi$$

و) gof

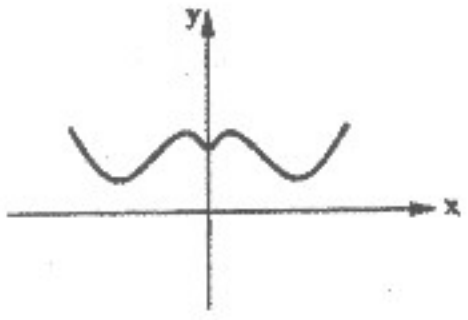
حل:

$gof = \{(-1,7)\ ,\ (4,7)\}$

توابع زوج و فرد

تابع $f(x)$ را تابعی زوج گوییم هرگاه :

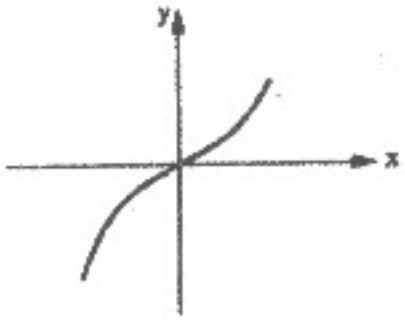
$$\begin{cases} \forall x \in D_f \longrightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$



از نقطه نظر هندسی تابعی زوج است که نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن باشد.

تابع $f(x)$ راتابعی فرد گوییم هرگاه :

$$\begin{cases} \forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$



از نقطه نظر هندسی تابعی فرد است که نمودار آن نسبت به مبدا مختصات متقارن باشد.

توجه : معمولاً برای تعیین زوج و فرد بودن یک تابع نیازی به تعیین دامنه و بررسی شرط تقارن نمی‌باشد. ولی باید توجه داشته باشیم اگر در مساله‌ای تابعی تعریف شود که دامنه آن بصورت غیر متقارن داده شده بود آن تابع نه زوج است و نه فرد. به عنوان مثال تابع $f(x) = x^3$ با شرط $-1 \le x \le 3$ نه فرد است و نه زوج زیرا دامنه آن متقارن نیست اگرچه ما می‌دانیم که تابع $f(x) = x^3$ به خودی خود تابعی فرد است.

نکته: تابع $y = 0$ تابعی است هم زوج و هم فرد زیرا هم نسبت به محور y ها و هم نسبت به مبدا مختصات متقارن است.

مثال: زوج و فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \dfrac{x\cos x + \sin^3 x}{x^4 + |x| + 1}$

حل:

$$f(-x)=\frac{-x\cos(-x)+\sin^3(-x)}{(-x)^4+|-x|+1}=\frac{(-x)(+\cos x)-\sin^3 x}{x^4+|x|+1}=\frac{-x\cos x-\sin^3 x}{x^4+|x|+1}$$

$$\Rightarrow f(-x)=-\frac{x\cos x+\sin^3 x}{x^4+|x|+1}=-f(x)$$

f تابعی فرد است.

ب) $f(x)=x\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)$

حل:

$$f(-x)=(-x)\left(a^{-x}-\frac{1}{a^{-x}}\right)=(-x)\left(\frac{1}{a^x}-a^x\right)=x\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)$$

پس $f(-x)=f(x)$ f تابعی زوج است

ج) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$

حل:

$f(-x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=f(x)$ f تابعی زوج است.

د) $f(x)=\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor$

حل:

$$0\le x-\lfloor x\rfloor<1\Rightarrow f(x)=\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor=0$$

یعنی $y=0$ هم تابعی است زوج و هم تابعی است فرد.

م) $f(x)=|x+1|-|x-1|$

حل:

$$f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=|-(x-1)|-|-(x+1)|=|x-1|-|x+1|$$

$$=-(|x+1|-|x-1|)=-f(x)$$ f تابعی است فرد.

ن) $f(x)=\log\left(\frac{6-x}{6+x}\right)$

حل:

$$f(-x)=\log\left(\frac{6+x}{6-x}\right)=\log\left(\frac{6-x}{6+x}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{6-x}{6+x}\right)=-f(x)$$

f تابعی فرد است.

نکته: بخاطر داشته باید توابع زیر همگی فرد می‌باشند:

$$\text{Log}_{*}\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|$$

$$\text{Log}_{*}\left(ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)$$

نکته: به موارد زیر توجه کنید:

(تابع فرد) ⟵ (تابع فرد) × (تابع زوج)

(تابع زوج) ⟵ (تابع زوج) × (تابع زوج)

(تابع زوج) ⟵ (تابع فرد) × (تابع فرد)

مثال: فرض کنید $f(x)$ تابعی فرد و $g(x)$ تابعی زوج است توابع fog و gof و fof را از حیث فرد یا زوج بودن بررسی نمایید.

حل:

$fog(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=fog(x)$ تابعی است زوج

$gof(-x)=g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))=gof(x)$ تابعی است زوج

$fof(-x)=f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))=-fof(x)$ تابعی است فرد

تابع یک به یک

تابع $y=f(x)$ را تابعی یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر y دلخواه حداکثر یک مقدار برای x وجود داشته باشد.

بنابراین طبیعی است از نظر هندسی تابعی یکی به یک است که هر خط به موازات محور x ها شکل آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدامیک از توابع زیر یک به یک هستند؟

الف) $|x|+y^3=2$

حل:

مثلاً به ازای $y=1$ داریم: $|x|+1=2\Rightarrow|x|=1\Rightarrow x=\pm1$

پس تابع یک به یک نمی‌باشد.

ب) $\lfloor x \rfloor = 3 - y$

حل:

مثلاً برای $\lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \le x \le 4$ داریم $y = 0$

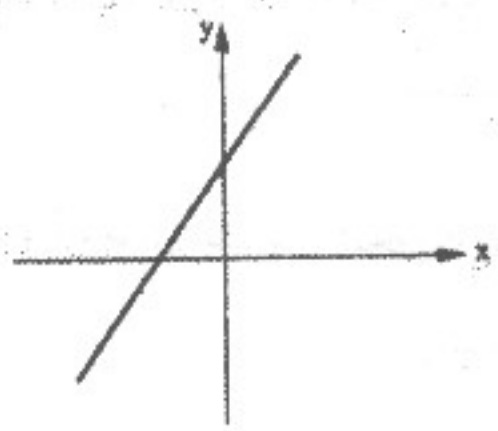
پس تابع یک به یک نمی‌باشد.

ج) $y = 3x + 11$

حل:

$y = 3x + 11$

همانطور که می‌دانید نمودار این تابع خط راستی می‌باشد که دارای شیب و عرض از مبدا است و با توجه به نمودار آن می‌توان گفت که این تابع یک به یک می‌باشد.



تابع اکیداً یکنوا

تابع $y = f(x)$ را در فاصله $[a,b]$ اکیداً صعودی گوییم هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را در فاصله $[a,b]$ اکیداً نزولی گوییم هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

توجه کنید اگر تابع $y = f(x)$ در یک فاصله یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد اصطلاحاً آن تابع در آن فاصله اکیداً یکنواست.

قضیه: اگر تابع $y = f(x)$ درفاصله‌ای پیوسته باشد، هرکجا $f'(x) > 0$ باشد تابع در آنجا اکیداً صعودی و هرکجا $f'(x) < 0$ باشد تابع در آنجا اکیداً نزولی است.

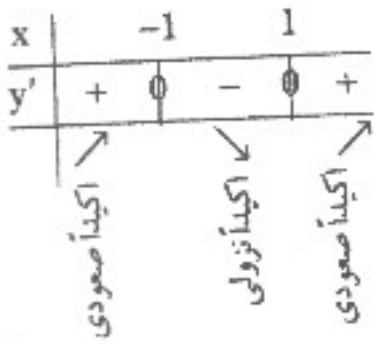
قضیه: هر تابع اکیداً یکنوا یک به یک است.

مثال: وضعیت توابع زیر را از حیث یک به یک بودن بررسی کنید:

الف) $y = x^3 - 3x$

حل: توابع چند جمله‌ای همه جا پیوسته می‌باشد و علامت مشتق رفتار تابع را مشخص می‌کند.

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



پس تابع مورد نظر طبیعت اکیداً یکنوا ندارد و لذا یک به یک نیست.

ب) $y = e^{2x} + 3x$

حل: تابع مورد نظر اکیداً صعودی است و در نتیجه یک به یک است.

$$y' = 2e^{2x} + 3 > 0$$

ج) $y = 4x + \sin x$

حل: این تابع نیز اکیداً صعودی و یک به یک می باشد.

$$y' = 4 + \cos x > 0$$

معکوس یک تابع

اگر تابع $y = f(x)$ یک به یک باشد آنگاه معکوس پذیر است یعنی می‌توان تابعی مانند $f^{-1}(x)$ به گونه‌ای یافت که داشته باشیم :

$$fof^{-1}(x) = \bar{f}of(x) = x$$

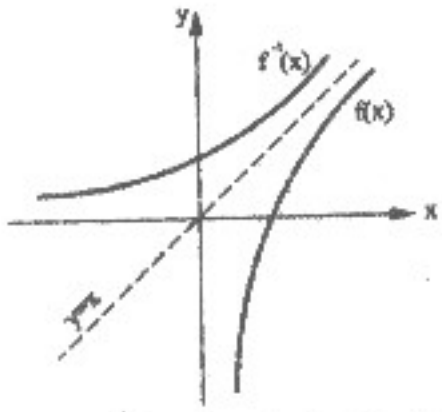
که در این صورت $f^{-1}(x)$ را معکوس تابع $f(x)$ می‌نامیم.

برای پیدا کردن ضابطه معکوس تابع $y = f(x)$ کافی است از این ضابطه x را برحسب y پیدا کنیم یعنی به رابطه ای مانند $x = G(y)$ برسیم حال می‌توان ادعا کرد:

$$f^{-1}(x) = G(x)$$

نکته: نمودار دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه همدیگرند و به تعبیری داریم:

باید توجه داشت:



$$D_f = R_{f^{-1}}$$
$$R_f = D_{f^{-1}}$$

نکته: اگر نقطه‌ای با مختصات (a,b) به نمودار تابع $f(x)$ تعلق داشته باشد آنگاه نقطه‌ای با مختصات (b, a) به نمودار تابع f^{-1} تعلق دارد و می‌توان نشان داد:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال: فرض کنید داریم:

$$f = \{(1,2),(1,\alpha),(3,4)\} \quad , \quad g = \{(2,3),(\beta,3),(5,1)\}$$

الف) α را طوری تعیین کنید که f تابع باشد.

ب) β را طوری تعیین کنید که g یک به یک باشد.

ج) معکوس g را بدست آورید.

حل:

الف) برای تابع بودن f نباید هیچ دو زوج مرتبی عضو اول یکسان داشته باشند. پس داریم : $\alpha = 2$

ب) برای یک به یک بودن g نباید هیچ دو زوج مرتبی عضو دوم یکسان داشته باشد. پس داریم :

$$\beta = 2 \Rightarrow g = \{(2,3),(5,1)\}$$

ج) $g^{-1} = \{(3,2),(1,5)\}$

مثال: ضابطه معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \frac{4x-3}{2+5x}$

حل:

$$y = \frac{4x-3}{2+5x} \Rightarrow 2y+5xy = 4x-3 \Rightarrow 5xy-4x = -3-2y \Rightarrow x(5y-4) = -3-2y \Rightarrow x = \frac{2y+3}{4-5y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{4-5x}$$

ب) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2-x}}}$

حل:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2-x}}}\Rightarrow\sqrt{3-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{y}\Rightarrow 3-\sqrt{2-x}=\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2-x}=3-\frac{1}{y^2}\Rightarrow 2-x=\left(3-\frac{1}{y^2}\right)^2\Rightarrow x=2-\left(3-\frac{1}{y^2}\right)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=2-\left(3-\frac{1}{x^2}\right)^2$$

ج) $f(x)=2+\sqrt[3]{2\tan x-1}$

حل:

$$y=2+\sqrt[3]{2\tan x-1}\Rightarrow(y-2)^3=2\tan x-1\Rightarrow\frac{(y-2)^3+1}{2}=\tan x\Rightarrow x=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{(y-2)^3+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{(x-2)^3+1}{2}\right)$$

د) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

حل:

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\xrightarrow[\text{در } e^x \text{ ضرب کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Rightarrow ye^{2x}+y=e^{2x}-1\Rightarrow ye^{2x}-e^{2x}=-y-1$$

$$\Rightarrow e^{2x}(y-1)=-y-1\Rightarrow e^{2x}=\frac{y+1}{1-y}$$

$$\Rightarrow 2x=\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

م) $f(x)=4+\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(3^x+1)$

حل:

$$y=4+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(3^x+1)\Rightarrow 2y-8=\operatorname{Arcsin}(3^x+1)\Rightarrow\sin(2y-8)=3^x+1\Rightarrow\sin(2y-8)-1=3^x$$

$$\log_3(\sin(2y-8)-1)=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3(\sin(2x-8)-1)$$

ن) $f(x)=\ln(\ln(4x+3))$

حل:

$$y=\ln\left(\ln(4x+3)\right)\Rightarrow e^{y}=\ln(4x+3)\Rightarrow e^{e^{y}}=4x+3$$

$$\Rightarrow e^{e^{y}}-3=4x\Rightarrow x=\frac{e^{e^{y}}-3}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^{e^{x}}-3}{4}$$

و) $f(x)=x-\frac{3}{x}\quad,\quad x>0$

حل:

$$y=x-\frac{3}{x}\ \Rightarrow\ y=\frac{x^2-3}{x}\Rightarrow xy=x^2-3\ \Rightarrow x^2-xy-3=0$$

با حل معادله درجه 2 داریم:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+12}}{2}$$

علامت مثبت و منفی پیدا شده در رابطه فوق بیانگر آن است که برای x دو مقدار پیدا می‌شود و این نشان می‌دهد که تابع مورد نظر به خودی خود یک به یک نیست و معکوس پذیر نیز نخواهد بود اما شرط $x>0$ که در مسئله داده شده ما را مجبور می کند علامت منفی را حذف کنیم، در حقیقت با این شرط $f(x)$ معکوس پذیر می‌شود و داریم:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+12}}{2}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\ln x+4x+x^2$ مطلوبست محاسبه: $fof\overset{-1}{o}f(1)$

حل:

$$fof^{-1}(x)=x\ \Rightarrow\ fof^{-1}(1)=1\ \text{یا}\ f\overset{-1}{o}f(1)=1$$

$$fof\overset{-1}{o}f(1)=f(1)=\ln(1)+4+1=5$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\ln\left(\frac{2x^3+1}{x^3-4}\right)$ ، نمودار معکوس این تابع محور y ها را در چه عرضی قطع می کند و در ضمن $f^{-1}(-1)$ را محاسبه کنید.

حل:

به دنبال نقطه‌ای مانند $(0,a)\in f^{-1}$ هستیم پس باید $(a,0)\in f$ باشد و داریم:

$$f(a)=\text{Ln}\left(\frac{2a^3+1}{a^3-4}\right)=0\Rightarrow\frac{2a^3+1}{a^3-4}=1\Rightarrow 2a^3+1=a^3-4\Rightarrow a^3=-5\Rightarrow a=\sqrt[3]{-5}$$

با فرض $f^{-1}(-1)=k$ داریم $f(k)=-1$ پس:

$$\text{Ln}\left(\frac{2k^3+1}{k^3-4}\right)=-1\Rightarrow e^{-1}=\frac{2k^3+1}{k^3-4}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{e}k^3-\frac{1}{e}(4)=2k^3+1\Rightarrow\frac{k^3}{e}-2k^3=1+\frac{4}{e}\Rightarrow k^3\left(\frac{1}{e}-2\right)=1+\frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow k^3\left(\frac{1-2e}{e}\right)=\frac{e+4}{e}\Rightarrow k^3=\frac{e+4}{1-2e}\Rightarrow k=\sqrt[3]{\frac{e+4}{1-2e}}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=x^7+4x-2$ نمودار معکوس این تابع از کدام نقطه زیر عبور می‌کند؟

الف) $(1,3)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(2,1)$

حل: طبیعی است نقطه‌ای در ضابطه تابع معکوس صدق می‌کند که وقتی جای مختصات آن نقطه عوض شود در خود تابع صدق کند و با کمی دقت ملاحظه می‌شود که گزینه (ب) صحیح است.

$f(1)=1+4-2=3$ یعنی $(1,3)\in f\Rightarrow(3,1)\in f^{-1}$

مثال: فرض کنیدداشته باشیم $f(x)=x^3+7x-2$ مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(6)$.

حل:

برای محاسبه مقدار $(f^{-1})'(6)$ کافی است بدانیم که چه عددی را باید x اختیار کند تا حاصل تابع عدد 6 شود.

$$x^3+7x-2=6\Rightarrow x=1$$

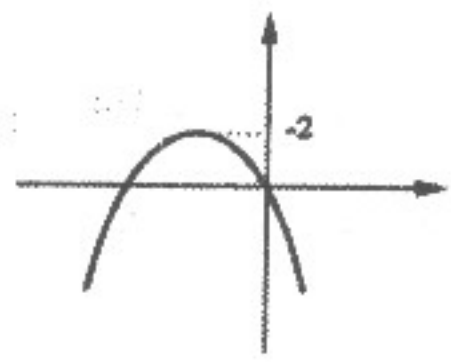
$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3(1)^2+7}=\frac{1}{10}$$

تابع پوششی (پوشا)

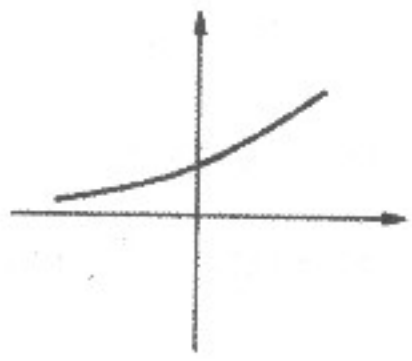
می‌گوییم $y=f(x)$ روی مجموعه A پوشا است هرگاه $A\subset R_f$ باشد دقت کنید وقتی می‌گوییم یک تابع پوشا است که برد آن $\mathbb{R}$ باشد.

از نقطه نظر هندسی تابعی را روی مجموعه اعداد حقیقی پوشا گویند که هر خط به موازات محور x ها نمودار آن را حداقل در یک نقطه قطع کند.

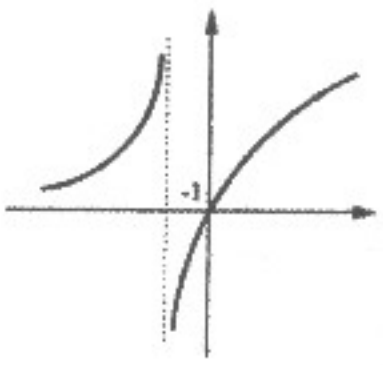
مثال: برای توابع ترسیم شده دامنه و برد را تعیین کنید و همچنین مشخص کنید که آیا این توابع پوشا هستند و اگر خیر روی چه بازه‌ای پوشا می‌باشند؟



$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = (-\infty, 2]$
تابع مذکور پوشا نیست ولی در بازه $(-\infty, 2]$ پوشاست.



$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = (0, +\infty)$
تابع مذکور پوشا نیست ولی در بازه $(0, +\infty)$ پوشاست.



$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
$R_f = \mathbb{R}$
تابع مذکور پوشا است.

مثال: برای تابع $f(x) = 2x^4 - 3$ مشخص نمایید که آیا این تابع پوشا است و اگر نیست روی چه بازه‌ای پوشا می‌باشد؟

حل:

$$y = 2x^4 - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x^4 \Rightarrow \frac{y+3}{2} = x^4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{y+3}{2}}$$

محدودیت y می‌طلبد که:

$$y + 3 \geq 0 \Rightarrow y \geq -3 \Rightarrow R_f = [-3, +\infty)$$

پس تابع روی بازه $[-3, +\infty)$ پوشا است.

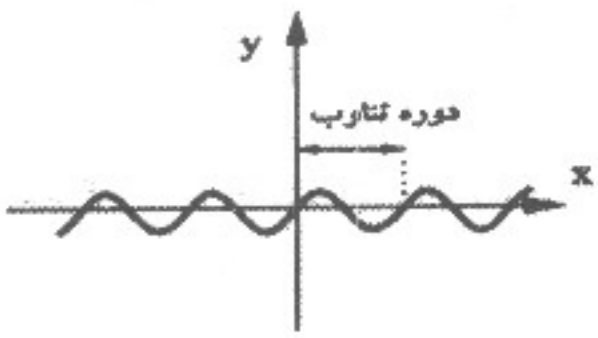
توابع متناوب

تابع $f(x)$ را تابعی متناوب گوییم هرگاه بتوان عددی مانند T پیدا کرد بطوریکه:

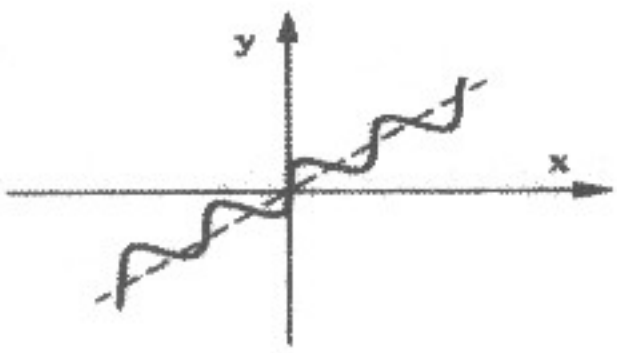
$$\begin{cases} \forall x \in D_f \rightarrow (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

و به کوچکترین T مثبتی که این شرایط را ارضاء کند، کوچکترین دوره تناوب تابع و یا به اختصار دوره تناوب تابع می گویند.

از نقطه نظر هندسی تابعی متناوب است که نمودار آن در امتداد محورx ها به طور متوالی تکرار شود.



متناوب است



متناوب نیست.

قضیه: فرض کنید α و β دو عدد ثابت معلوم باشد، تابعی مانند $y=\alpha f(x)+\beta g(x)$ زمانی متناوب است که اولاً: هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ متناوب باشند، ثانیاً نسبت دوره‌های تناوب دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ عددی گویا باشد (گنگ نباشد). در این شرایط دوره تناوب y را می‌توان با مفهومی نظیر ک.م.م تعیین کرد.

نکته: به خاطر داشته باشید:

$$\begin{cases}\sin^{2k+1}(ax+b)\\ \cos^{2k+1}(ax+b)\end{cases}\rightarrow T=\left|\frac{2\pi}{a}\right|$$

$$\begin{cases}\sin^{2k}(ax+b)\\ \cos^{2k}(ax+b)\end{cases}\rightarrow T=\left|\frac{\pi}{a}\right|$$

$$\begin{cases}\tan^{k}(ax+b)\\ \cot^{k}(ax+b)\end{cases}\rightarrow T=\left|\frac{\pi}{a}\right|$$

$$\begin{cases}ax-[ax]\rightarrow T=\left|\frac{1}{a}\right|\\ ax+[ax]\rightarrow \text{متناوب نمی‌باشد}\end{cases}$$

$$(-1)^{[ax]}\rightarrow T=\left|\frac{2}{a}\right|$$

به نکات زیر توجه فرمایید:

۱- توابع مثلثاتی معمولاً فقط زمانی متناوبند که دارای کمانهای خطی از x باشند بنابراین توابعی مانند: $\cos(x^2)$ یا $\tan\left(\frac{2}{x}\right)$ یا $\sin^3(\sqrt{x})$ یا $\cot(e^x)$ غیر متناوبند.

$$\begin{cases}\sin|x|\\ \tan|x|\\ \cot|x|\end{cases}\rightarrow \text{غیر متناوبند}\ ,\ \cos|x|\xrightarrow[\text{است}]{\text{متناوب}}T=2\pi$$

۲- وجود عبارتهای جبری غیر مثلثاتی در ضابطه یک تابع معمولاً به نامتناوب بودن تابع می‌انجامد. مثلاً:

$\begin{cases} x^2+\cos x \\ x\tan x \\ e^x \sin x \end{cases}$ → متناوب نمی‌باشند.

۳- اگر تابع f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد تابع قدر مطلق |f| نیز متناوب است که دوره تناوب آن T یا $\frac{T}{2}$ می‌باشد.

۴- در توابع مثلثاتی چنانچه امکان ساده کردن ضابطه تابع وجود داشته باشد برای یافتن کوچکترین دوره تناوب باید ضابطه راساده کرده و سپس به تعیین دوره تناوب بپردازیم زیرا ممکن است اگر قبل از ساده سازی دوره تناوب را پیدا کنیم، دوره تناوب بدست آمده کوچکترین دوره تناوب نباشد.

۵- در مواردیکه هدف یافتن دوره تناوب توابعی است که در بحثهای فوق بررسی نشد با امتحان گزینه‌ها دوره تناوب تابع را به دست می‌آوریم برای این منظور از کوچکترین گزینه شروع می‌کنیم و هر کدام از گزینه‌ها که شرط دوره تناوب را ارضا کند به عنوان گزینه صحیح در نظر گرفته می‌شود.

مثال: کدامیک از توابع زیر متناوب می‌باشند؟ دوره تناوب را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=\sin x+e^{-x}\cos x$

حل:

$\begin{cases} \sin x \longrightarrow & \text{متناوب } T=2\pi \\ e^{-x}\cos x \longrightarrow & \text{غیر متناوب} \end{cases} \Rightarrow$ تابع نا متناوب است

ب) $f(x)=3\cos^5(1-7x)+2\tan^2(3x+1)$

حل:

$\cos^5(1-7x) \longrightarrow T_1=\left|\frac{2\pi}{-7}\right|=\frac{2\pi}{7}$

$\tan^2(3x+1) \longrightarrow T_2=\left|\frac{\pi}{3}\right|=\frac{\pi}{3}$

چون $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{2\pi}{7}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{6}{7}$ گویا است پس تابع متناوب می‌باشد.

$T_1=\frac{2\pi}{7}=\frac{6\pi}{21}$

$T_2=\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{21}$ $\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T=\frac{42}{21}\pi \Rightarrow \underline{T=2\pi}$

ج) $f(x)=3x-\lfloor 3x\rfloor+\sin^3(1-2\pi x)$

حل:

$3x-\lfloor 3x\rfloor \longrightarrow T_1=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$

$\sin^3(1-2\pi x) \longrightarrow T_2=\left|\frac{2\pi}{-2\pi}\right|=1$

چون $\frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{3}$ گویا است پس تابع متناوب است و داریم:

$$T_1=\frac{1}{3}\Rightarrow T_1=\frac{1}{3}$$
$$T_2=1\Rightarrow T_2=1\times\frac{1}{3}$$
$$\rightarrow T=\frac{1}{3}\left(\text{ک.م.م}(1),(3)\right)=\frac{1}{3}\times 3=1\Rightarrow T=1$$

د) $f(x)=2\sin 5x.\cos x$

حل:

$$y=2\sin 5x.\cos x=\sin(5x+x)+\sin(5x-x)=\sin 6x+\sin 4x$$
$$\sin 6x\rightarrow T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$
$$\sin 4x\rightarrow T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$
$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T=\pi$$

هـ) $f(x)=(-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]}+\cos x$

حل:

$$(-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]}\rightarrow T_1=\left|\frac{2}{\frac{1}{\pi}}\right|=2\pi$$
$$\cos x\rightarrow T_2=2\pi$$
$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T=2\pi$$

مثال: کوچکترین دوره تناوب $f(x)=\tan x-\cot x$ را پیداکنید.

حل:

اگر عمل ساده سازی را انجام ندهیم داریم:

$$\begin{cases}\tan x\rightarrow T_1=\pi\\ \cot x\rightarrow T_2=\pi\end{cases}\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T=\pi$$

حال عمل ساده سازی را انجام می‌دهیم و سپس دوره تناوب را تعیین می‌کنیم:

$$y=\tan x-\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=-2\cot 2x\longrightarrow T=\frac{\pi}{2}$$

پس دوره تناوب تابع $T=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال : دوره تناوب تابع $f(x)=\left|\sin\frac{x}{3}\right|$ کدام است؟

الف) 6π ب) 3π ج) 2π د) متناوب نیست.

حل: از کوچکترین گزینه شروع می‌کنیم:

$$f(x+2\pi)=\left|\sin\left(\frac{x+2\pi}{3}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right|\neq f(x)$$

پس گزینه (ج) صحیح نمی‌باشد.

$$f(x+3\pi)=\left|\sin\left(\frac{x+3\pi}{3}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{x}{3}+\pi\right)\right|=\left|-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right|=\left|\sin\frac{x}{3}\right|=f(x)$$

پس گزینه (ب) صحیح می‌باشد.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x\rfloor\right)$ کدام است؟

الف) 4 ب) 8

ج) 12 د) متناوب نمی‌باشد.

حل:

از کوچکترین دوره تناوب آغاز می‌کنیم:

$$f(x+4)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x+4\rfloor\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x\rfloor+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x\rfloor\right)=f(x)$$

پس گزینه (الف) جواب مورد نظر است.

مثال: تابع $f(x)$ دارای خاصیت $f(x+a)=-f(x)$ می‌باشد دوره تناوب $f(x)$ کدام است؟

الف) a ب) 2a

ج) 3a د) متناوب نیست

حل:

از کوچکترین دوره تناوب آغاز می‌کنیم:

پس گزینه (الف) صحیح نمی‌باشد $f(x+a)=-f(x)$

پس دوره تناوب تابع $T=2a$ است. $f(x+2a)=f(x+a+a)=f\big((x+a)+a\big)=-f(x+a)=-\big(-f(x)\big)=f(x)$

« حدوپیوستگی »

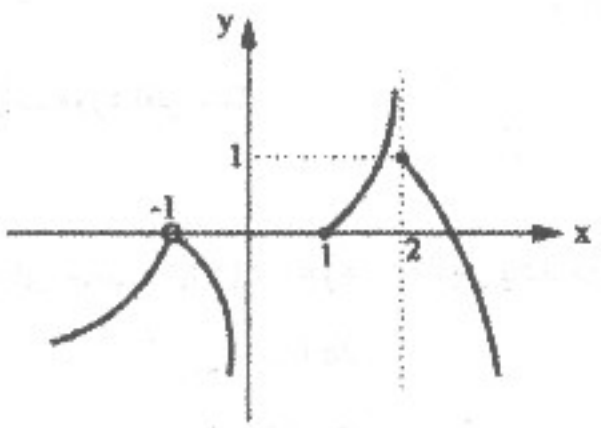
▪ می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد است هرگاه حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

▪ می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه حد چپ و حد راست و مقدار تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

مثال: نمودار تابعی در شکل زیر ترسیم شده است وضعیت حد و پیوستگی این تابع را در نقاط $x=-1$ و $x=0$ و $x=2$ بررسی کنید.



حل:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=0 \ ، \ \lim_{x\to -1^-} f(x)=0 \ ، \ f(-1)= \text{تعریف نشده}$$

پس تابع در $x=-1$ دارای حد است ولی پیوسته نمی‌باشد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)= \text{موجود نمی‌باشد} \ ، \ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \ ، \ f(0)= \text{تعریف نشده}$$

پس تابع در $x=0$ نه حد دارد ونه پیوسته است.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \ ، \ \lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \ ، \ f(2)=1$$

تابع در $x=2$ حد راست داشته ولی حد چپ ندارد. پس تابع در $x=2$ دارای حد نمی‌باشد وپیوسته نیز نمی‌باشد ولی پیوستگی راست دارد.

مثال: مقادیر a,b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=3$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \lfloor 2x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & , \ x<3 \\ a & , \ x=3 \\ \lfloor x \rfloor + bx & , \ x>3 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lfloor 3^+ \rfloor + 3b = 3 + 3b$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lfloor 2(3^-) \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{3^-} \right\rfloor = 5 + 0 = 5$$

$$f(3) = a$$

$$\underline{a = 5} \quad , \quad 3 + 3b = 5 \Rightarrow 3b = 2 \Rightarrow \underline{b = \frac{2}{3}}$$

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید، این تابع درچند نقطه ناپیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \\ x^2 + x - 2 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

حل: داریم :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , \ -1 < x < 1 \\ x^2 + x - 2 & , \ x \geq 1 \ \text{یا} \ x \leq -1 \end{cases}$$

طبیعی است کاندید نقاط ناپیوستگی این تابع همان نقاطی هستند که ضابطه تابع عوض شده است یعنی نقاط $x = 1$ و $x = -1$ پس کافی است تابع را در این نقاط بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2 \end{cases}$$ پس تابع در $x = -1$ ناپیوسته است

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \end{cases} , \ f(1) = 0$$ پس تابع در $x = 1$ پیوسته است

مثال: مقدار k چگونه باشد تا تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 3x + k}$ در کل فاصله $x \geq 0$ پیوسته باشد؟

حل: $\sqrt{x}$ در کل دامنه یعنی $x \geq 0$ پیوسته است، پس برای پیوستگی کل تابع در بازه $x \geq 0$ مخرج نباید ریشه حقیقی داشته باشد یعنی $\Delta < 0$ پس داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow 4k > 9 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $I = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x^2 \rfloor}{x + 2}$

حل:

$$I=\lim_{x\to 2^-}\frac{\lfloor 2^- \rfloor^2-\lfloor (2^-)^2\rfloor}{2^-+2}=\frac{1-3}{4}=\frac{-1}{2}$$

ب) $I=\lim_{x\to 1}\left\lfloor \cos\frac{\pi x}{2}\right\rfloor$

حل:

$$\lim_{x\to 1^+}\left\lfloor \cos\frac{\pi x}{2}\right\rfloor=\left\lfloor \cos\frac{\pi^+}{2}\right\rfloor=\lfloor -\varepsilon\rfloor=-1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left\lfloor \cos\frac{\pi}{2}x\right\rfloor=\left\lfloor \cos\frac{\pi^-}{2}\right\rfloor=\lfloor +\varepsilon\rfloor=0$$

پس تابع مذکور در $x=1$ حد ندارد.

ج) $I=\lim_{x\to 1^+}(-1)^{\lfloor 2x\rfloor}+\left\lfloor \cos\frac{\pi}{2}(x-1)\right\rfloor$

حل:

$$I=(-1)^2+\lfloor \cos 0^+\rfloor=1+\lfloor 1^-\rfloor=1+0=1$$

د) $I=\lim_{x\to -1^-}\frac{\lfloor x\rfloor+2}{x+1}$

حل:

$$I=\lim_{x\to -1^-}\frac{(-2)+2}{-1^-+1}=\frac{0}{0^-}=\frac{\text{صفر واقعی}}{\text{صفر حدی}}=0$$

م) $I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-|x|}{x}$

حل:

$$x\to 0^+\Rightarrow |x|=x$$

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x}=\frac{0}{0^+}=0$$

ن) $I=\lim_{x\to 0^-}=\frac{x-|x|}{x}$

حل:

$$x\to 0^-\Rightarrow |x|=-x$$

$$I=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

و) $I=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+\lfloor x\rfloor}{x-1}$

حل:

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+\lfloor x\rfloor}{x-1}=\frac{1+0}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

حالات ابهام مقدماتی

همانطور که می‌دانید وضعیت های حدی $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ به صور مبهم مقدماتی معروفند. چنانچه در یک مسئله حد به یکی از حالات بالا برخورد کردیم لازم است به طریقی رفع ابهام کرده و حاصل حد را بدست آوریم. که در ابتدایی ترین مسائل این کار ممکن است با حذف عامل ابهام کننده صورت گیرد.

قاعده هوپیتال:

هرگاه در محاسبه حدی مانند $I=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از حالات ابهام $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد کردیم برای رفع ابهام حد مورد نظر می‌توان نوشت: $I=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ و چنانچه حد حاصله مجدداً مبهم بوده می‌توان مجدداً از قاعده هوپیتال استفاده کرد و نوشت: $I=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ و اینکار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به رفع ابهام نهایی برسیم.

نکته: بسیاری از حدهای مبهم از نوع $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ را می‌توان به سادگی به یکی از حالات ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و سپس آنها را رفع ابهام کرد.

نکته: بدیهی است حد زیر مبهم از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ است و می‌توان نشان داد حاصل کار پس از رفع ابهام چنین است:

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^{m-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots}=\begin{cases}0 & \text{اگر } m<n\\ \frac{a}{a'} & \text{اگر } m=n\\ \infty & \text{اگر } m>n\end{cases}$$

یادآوری:

وقتی v و u دو تابع از x و a عددی ثابت باشد داریم:

$y = u.v \rightarrow y' = u'v + v'u$

$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$y = u^a \rightarrow y' = a.u^{a-1}.u'$

$y = a^u \rightarrow y' = u'.a^u.\ln a$

$y = \log_a^u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}.\frac{1}{\ln a} \Rightarrow y = Lnu \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

$y = \sqrt[a]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{a\sqrt[a]{u^{a-1}}}$

$y = \sin u \rightarrow y' = u'\cos u$

$y = \cos u \rightarrow y' = -u'\sin u$

$y = \tan u \rightarrow y' = u'\left(1 + \tan^2\right)$

$y = \cot u \rightarrow y' = -u'\left(1 + \cot^2 u\right)$

$y = Arc\sin u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = Arc\cos u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = Arc\tan u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

$y = Arc\cot u \rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

مثال: مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $I = \lim_{x\to 1} \frac{x^8 + 3x^2 - 4}{x^5 + x^4 + x - 3}$

حل:

$I = \frac{0}{0}$ مبهم

$H: I = \lim_{x\to 1} \frac{8x^7 + 6x}{5x^4 + 4x^3 + 1} = \frac{8+6}{5+4+1} = \frac{14}{10}$

ب) $I = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x-2} - 1}{x\ln x}$

حل:

$I = \frac{0}{0}$ مبهم

$H: I = \lim_{x\to 1} \frac{(2x+1)e^{x^2+x-2}}{\ln x + 1} = \frac{3\times 1}{0+1} = 3$

ج) $I=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}+3^{-x}-2}{e^{x^2-3x}-1}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H: I=\lim_{x\to 0}\frac{(2)(3^{2x})(\ln 3)-(1.3^{-x})(\ln 3)}{(2x-3).e^{x^2-3x}}=\frac{2(1)(\ln 3)-(1)(1)(\ln 3)}{(0-3)e^{0}}=\frac{\ln 3}{-3}$$

د) $I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(5x^2+3x-7)}{\ln(6-5x)}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H: I=\lim_{x\to 1}\frac{(10x+3)/(5x^2+3x-7)}{-5/(6-5x)}=\frac{13/1}{-5/1}=-\frac{13}{5}$$

م) $I=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}.\operatorname{sgn}(x-2)$

حل:

$$\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}1 & u>0\\ 0 & u=0\\ -1 & u<0\end{cases}\Rightarrow \operatorname{sgn}(x-2)=\begin{cases}1 & x>2\\ 0 & x=2\\ -1 & x<2\end{cases}$$

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H: \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{3x^2}{2x+1}\right)(-1)=-\frac{3(4)}{4+1}=-\frac{12}{5}$$

ن) $I=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5+x-1)^6-x}{(x^3+x^2+1)(x^4+1)-6}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H: \lim_{x\to 1}\frac{6(5x^4+1)(x^5+x-1)^5-1}{(3x^2+2x)(x^4+1)+(x^3+x^2+1)(4x^3)}=\frac{6(6)(1)^5-1}{(5)(2)+(3)(4)}=\frac{35}{22}$$

و) $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+3)}{x^3+4x-1}$

حل:

$I=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

$H:I\lim_{x\to+\infty}\frac{2/(2x+3)}{3x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(2x+3)(3x^2+4)}=\frac{2}{+\infty}=0$

نکته: روابط زیر را به خاطر داشته باشید:

مفهوم ترکیب : $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!}$

مفهوم ترتیب : $(a)_b=\frac{a!}{(a-b)!}$

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{3}.(3n+1)}{(n)_2.(n^2+6n-1)}$

حل:

$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}.(3n+1)}{\frac{n!}{(n-2)!}.(n^2+6n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!.(3n+1)}{3!(n-3)!.(n^2+6n-1)}$

$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)(n-3)!(3n+1)}{6(n-3)!.(n^2+6n-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3n^2-5n-2}{6n^2+36n-6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ب) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n+7}$

حل:

$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+6n+14}=\frac{1}{2}$

ج) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n^2+3n-1)(n-1)!}$

حل:

$I=\frac{\infty}{\infty}$ ابهام دارد.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n^2+3n-1)(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{n^2+3n-1}=\infty$$

چون درجه صورت از مخرج بزرگتر است .

مثال: مقادیر a,b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x} & , x>0\\ b & , x=0\\ \frac{\ln(x^2+3x+1)}{\ln(1+2x)} & , x<0\end{cases}$$

حل:

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x}=\frac{0}{0}$ ابهام دارد

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+a^3)^{\frac{1}{3}}-a}{x}\xrightarrow{H}\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(x+a^3)^{\frac{-2}{3}}}{1}=\frac{1}{3}(a^3)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3a^2}$$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(x^2+3x+1)}{\ln(1+2x)}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H:\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(2x+3)/(x^2+3x+1)}{+2/(1+2x)}=\frac{3/1}{2/1}=\frac{3}{2}$$

$f(0)=b$

$b=\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{3a^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{9}=a^2\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

مثال: مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $I=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

حل:

$1=\infty-\infty$ مبهم

$I=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H: I=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x+xe^x-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$H: I=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{-1}{1+0+1}=\frac{-1}{2}$$

ب) $I=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3x+1}\right)$

حل:

$I=\infty\times 0$ مبهم

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{3x+1-2x-2}{(x+1)(3x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x-1}{(x+1)(3x+1)}\right)$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(3x+1)}=\frac{1}{(2)(4)}=\frac{1}{8}$$

ج) $I=\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$

حل:

$I=0\times\infty$ مبهم

$$I=\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

$$H:\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{-2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0$$

د) $I=\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

حل:

$I=0\times\infty$ مبهم

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$H: I=\lim_{x\to 1}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}\left(1+\cot\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{-2}{-\frac{\pi}{2}(1+0)}=\frac{4}{\pi}$$

م) $I=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

حل:

$I=\infty-\infty$ مبهم

$I=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H:I=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)/x}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}$$

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$H:I=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=\frac{-1}{2}$$

ن) $I=\lim_{x\to3^+}\frac{x^3-\lfloor x^3\rfloor}{x-3}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$I=\lim_{x\to3^+}\frac{x^3-\lfloor(3^+)^3\rfloor}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$H:I=\lim_{x\to3^+}\frac{3x^2}{1}=27$$

و) $I=\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{Arc}\tan 2x+\operatorname{Arc}\tan 3x-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}$

حل:

$$\operatorname{Arc}\tan a+\operatorname{Arc}\tan b=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)+\pi$$

$$I=\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{2+3}{1-6}\right)x+\pi-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{Arc}\tan(-1)x+\pi-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$H:\ I=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2}{1+4x^2}+\frac{3}{1+9x^2}}{2x}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{10}}{2}=\frac{\frac{7}{10}}{2}=\frac{7}{20}$$

قضیه فشردگی (ساندویچ)

هرگاه برای تمام x های در همسایگی $x=a$ داشته باشیم: $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و بدانیم که $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$ آنگاه می‌توان نشان داد:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

مثال: برای x های در همسایگی نقطه $x=0$ اطلاعات زیر در دست است:

$$\left\lfloor x+\frac{3}{2}\right\rfloor\le f(x)\le\frac{e^x-1}{x}$$
$$x^2+x\le g(x)\le\cos x$$

مطلوبست است محاسبه حدهای زیر:

الف) $\lim_{x\to0}f(x)$

حل:

$$\lim_{x\to0}\left\lfloor x+\frac{3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor 0+\frac{3}{2}\right\rfloor=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}\ \text{(مبهم است)}\quad H:\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

پس طبق قضیه فشردگی داریم :

$$\lim_{x\to0}f(x)=1$$

ب) $\lim_{x\to0}g(x)$

حل:

$$\lim_{x\to0}x^2+x=0$$
$$\lim_{x\to0}\cos x=1$$

پس نتیجه می گیریم $\lim_{x\to0}g(x)$ موجود نمی‌باشد اگر چه انتظار داریم حاصل $g(x)$ در نقاط همسایگی $x=0$ عددی بین 0 و 1 است.

ج) $\lim_{x\to0}xg(x)$

حل:

$$\lim_{x\to0}x\left(x^2+x\right)=0$$
$$\lim_{x\to0}x\cos x=0\times1=0$$

پس طبق قضیه فشار داریم :

$$\lim_{x\to0}xg(x)=0$$

توجه مهم: همانطور که می‌دانید وضعیت حدی $0\times\infty$ یکی از صور مبهم است که نیاز به رفع ابهام دارد ولی موارد زیر نباید با این حالت اشتباه گرفته شود.

قضیه: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ باشد (این صفر می‌تواند صفر واقعی نباشد) و تابع $g(x)$ در مجاورت $x=a$ کراندار و محدود باشد (حتی اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود نباشد) آنگاه می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0\times \text{ کراندار } = 0$$

نکته : هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر صفر واقعی باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ باشد آنگاه می‌توان گفت :

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \text{(صفر واقعی)} \times \text{(بی نهایت بزرگ)} = 0$$

مثال: مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $I=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{5}{x}\right)$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{5}{x} = 0\times \text{ عبارت کراندار } = 0$$

ب) $I=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{\sqrt{2}}{x}\right\rfloor$

حل:

$$I=\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{\sqrt{2}}{x}\right\rfloor = +\infty\times\left\lfloor 0^{+}\right\rfloor = +\infty\times \text{ صفر واقعی } = 0$$

ج) $I=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left\lfloor\frac{\sqrt{2}}{x}\right\rfloor$

حل:

$$I=\lim_{x\to-\infty} x\left\lfloor\frac{\sqrt{2}}{x}\right\rfloor = -\infty\times\left\lfloor 0^{-}\right\rfloor = -\infty\times -1 = +\infty$$

قواعد هم‌ارزی

همانطور که می‌دانید قواعد هم ارزی روابطی هستند که این امکان را مهیا می‌سازند که در محاسبه یک حد مبهم به طریقی مناسب به جای یک جمله پیچیده معادل یا هم ارز آن را قرار داده تا مسئله ساده تر گشته، سپس حد حاصله را رفع ابهام می کنیم.

توجه : در استفاده از هر نوع قاعده هم ارزی توجه به یک نکته ضروری است و آن این که اگر هم ارز یک عبارت را در مسئله‌ای قرار دادیم و دقیقاً آن عبارت با قرینه خود جمع شود، استفاده از آن قاعد هم ارزی خاص مجاز نمی باشد، در این گونه مواقع با باید از وضعیت تعمیم یافته آن قاعده هم ارزی استفاده کنیم و یا اصولاً با روش دیگری مسئله را حل کنیم.

چند قاعده هم ارزی عبارتند از :

الف) وقتی $n \to \infty$ داریم :

$$1^P + 2^P + 3^P + \cdots + n^P \sim \frac{n^{P+1}}{P+1}$$

ب) هرگاه $x \to \infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \cdots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right| & \text{اگر n زوج باشد،} \\ \sqrt[n]{a}\left(x + \frac{b}{na}\right) & \text{اگر n فرد باشد،} \end{cases}$$

ج) هرگاه $A \to \infty$ داریم :

$$\lfloor A \rfloor \sim A$$

د) وقتی $A \to 0$ داریم:

$$\begin{cases} \sin A \sim A \\ \tan A \sim A \end{cases} \quad \text{در حالت تعمیم یافته :} \quad \begin{cases} \sin A \sim A - \frac{A^3}{6} \\ \tan A \sim A + \frac{A^3}{3} \end{cases}$$

هـ) وقتی $A \to 0$ داریم :

$$\sqrt[n]{1+A} \sim 1 + \frac{A}{n}$$

مثال : حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $I = \lim_{n \to \infty} \frac{1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7}{n^8 + 1}$

حل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^8}{8}}{n^8+1}=\frac{1}{8}$$

ب) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor 3n+4\rfloor}{2n+1}$

حل:

$n\to\infty\Rightarrow(3n+4)\to\infty$

پس داریم : $I=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n+1}=\frac{3}{2}$

ج) $I=\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x\sin^2(7x)}$

حل:

$x\to0\Rightarrow 7x\to0$ مبهم است $I=\frac{0}{0}$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{x(7x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x^3}{3}}{49x^3}=\frac{-1}{147}$$

د) $I=\lim_{x\to0}x\left\lfloor\frac{\sqrt{5}}{x}\right\rfloor$

حل:

$x\to0\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{x}\to\infty$

پس داریم : $I=\lim_{x\to0}x.\frac{\sqrt{5}}{x}=\sqrt{5}$

م) $I=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^4+x^3+2x-4)}{\ln(4x^2-3)}$

حل:

$x\to1\Rightarrow(x^4+x^3+2x-4)\longrightarrow0$

پس داریم : $I=\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3+2x-4}{\ln(4x^2-3)}=\frac{0}{0}$ مبهم است

$$H:I=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2+2}{\frac{8x}{4x^2-3}}=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2-3)(4x^3+3x^2+2)}{8x}=\frac{9}{8}$$

ن) $I=\lim_{x\to\infty}3x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

حل:

$$x\to\infty\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}3x.\frac{1}{x}=3$$

و) $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8x-1}+3x}{2x-\sqrt[3]{x^3+4x}}$

حل:

$I=\frac{\infty+\infty}{\infty-\infty}$ مبهم

طبق قاعده هم ارزی داریم $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4}\left|x+\frac{8}{2\times 4}\right|+3x}{2x-\sqrt{1}\left(x+\frac{4}{3\times 1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2+3x}{2x-x-\frac{4}{3}}$

$$I=\lim_{x\to+\infty}=\frac{5x+2}{x-\frac{4}{3}}=5$$

هـ) $I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x}{x^2.\sin^2 x}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

هم ارزی : $I=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2-x^2}{x^2.x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^9}{36}-x^2}{x^4}$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+\frac{x^9}{36}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+0}{x^4}=\frac{-1}{3}$$

یا

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2.\sin^2 x}$$

از طرفی می‌دانیم زمانی که $x \to 0$ داریم :

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$$

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}(2x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{6x^4} = \frac{1}{3}$$

مقایسه مرتبه صفرها و مرتبه بینهایت ها

الف) وقتی $x \to +\infty$ و $m > n > 1$ و $a > b > 0$ داریم :

$$\log_a^x << x^b << x^a << n^x << m^x << x! << x^x$$

همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ می‌باشند.

ب) وقتی $x \to 0^+$ و $0 < m < 1$ و $a > b > 0$ داریم :

$$x^b >> x^a >> m^{\frac{1}{x}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $I = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + n^{20} + 3^n}$

حل:

وقتی $n \to +\infty$ پس داریم : $n^{20} << 2^n << 3^n$

$$I = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{n}{n}} = 3$$

ب) $I = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(x^9 + x\sqrt{x} + 4x\right)}{\sqrt[8]{x^7 + 6x^2 + 3x}}$

حل:

وقتی $x \to 0^+$

$$\begin{cases} x^9 << x\sqrt{x} << 4x \\ x^7 << x^2 << 3x \end{cases}$$

پس داریم :

$$I = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(4x)}{\sqrt[8]{3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{\sqrt[8]{3}.\sqrt[8]{x}}$$

$$I = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\sqrt[8]{3}}.\frac{x}{x^{\frac{1}{8}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\sqrt[8]{3}}.x^{\frac{7}{8}} = 0$$

ج) $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{x!+e^x}{x^x}$

حل:

وقتی $x \to +\infty$ $x! >> e^x$ پس:

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{x!}{x^x}$$

از طرفی می‌دانیم زمانی که $x \to +\infty$ $x^x >> x!$ پس می‌توان نوشت: $I = 0$

د) $I = \lim_{x\to+\infty} \left(x^{100}+2x\right)e^{-0.1x}$

حل:

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}+2x}{e^{0.1x}} = \frac{\text{بینهایت توانی}}{\text{بینهایت نمایی}} = 0$$

چون:

بینهایت توانی << بینهایت نمایی

م) $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4^x+\sqrt[3]{x}+7}{5^x+3x^2}$

حل:

وقتی $x \to +\infty$ $4^x >> x^3 >> \sqrt[3]{x}$ (همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ)

وقتی $x \to +\infty$ $5^x >> x^2$ (همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ)

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{5^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{+\infty} = 0$$

ن) $I = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4^x+\sqrt[3]{x}+7}{5^x+3x^2}$

حل:

وقتی $x \to -\infty$: $4^x = 4^{-\infty} = 0$, $5^x = 5^{-\infty} = 0$

و چون x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند پس بی‌نهایت توانی با توان بزرگتر از اهمیت بیشتری برخوردار است پس داریم:

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$$

و) $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+3^{-x}+4}{x^3+2x-1}$

حل:

وقتی $x\to+\infty$: $3^{-x}\to 0$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}$$

از طرفی می‌دانیم که :

وقتی $x\to+\infty$: $\ln x << x^3$ پس داریم: $I=0$

حالات مبهم نمایی

همانطور که می‌دانید وضعیتهای حدی 1^∞ و 0^0 و ∞^0 و 0^∞ به صور مبهم نمایی موسومند.

چنانچه در یک مسئله حد مانند $I=\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ به یکی از حالات ابهام فوق برخورد کردیم قاعده کلی برای رفع ابهام آن است که از دو طرف رابطه بالا ln بگیریم تا داشته باشیم:

$$\ln I=\lim_{x\to a}g(x).\ln f(x)$$

حال کافی است حد ایجاد شده درسمت راست تساوی فوق را رفع ابهام کنیم تا بدین ترتیب $\ln I$ و از آنجا I محاسبه شود.

مثال: حاصل حدود زیر را بدست آورید.

الف) $I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^x$

حل:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$$

ب) $I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{3x-1}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

حل:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{3x-1}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\text{عدد}}{\infty}}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$$

ج) $I=\lim_{x\to 1^-}\lfloor x\rfloor^{\frac{1}{x-1}}$

حل:

$I=\lim_{x\to 1^+}\lfloor x\rfloor^{\frac{1}{x-1}}=\lfloor 1^+\rfloor^{\frac{1}{1^+-1}}=(\text{1 واقعی})^{+\infty}=1$

توجه کنید که حد بالا هیچ نوع ابهامی ندارد.

د) $I=\lim_{x\to 0^-}\lfloor x\rfloor^{x}$

حل:

$I=\lim_{x\to 0^-}\lfloor x\rfloor^{x}=\lfloor 0^+\rfloor^{0^+}=\underset{\text{صفر واقعی}}{(\text{صفر واقعی})}=0$ صفر غیر واقعی

حد بالا هیچ نوع ابهامی ندارد.

ر) $I=\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan 4x}$

حل:

$I=0^0$ مبهم

$I=\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan 4x}=\lim_{x\to 0^+}(x)^{4x}$

$\ln I=\lim_{x\to 0^-}4x.\ln x \Rightarrow \ln I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{4x}}=\frac{\infty}{\infty}$

$H:\ln I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{4x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-4x^2}{x}=0 \Rightarrow I=e^0=1$

ز) $I=\lim_{x\to 0}(e^x+4x)^{\frac{1}{x}}$

حل:

$I=1^{\infty}$ مبهم

$\ln I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.\ln(e^x+4x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+4x)}{x}=\frac{0}{0}$

$H:\ln I=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+4)/(e^x+4x)}{1}=\frac{5}{1}=5\Rightarrow I=e^5$

م) $I=\lim_{x\to+\infty}(n^2+3n)^{\frac{1}{n}}$

حل:

$I=\infty^0$ مبهم

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(n^2+3n\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+3n\right)}{n}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$H:\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{(2n+3)/\left(n^2+3n\right)}{1}=0\Rightarrow I=e^0=1$$

نکته: فرض کنید a,b اعداد دلخواه ثابت باشند، داریم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{an^b}=\infty^0\xrightarrow{\text{پس از رفع ابهام}}I=1$$

ن) $I=\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

حل:

$I=1^\infty$ مبهم

$$\ln I=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{0}{0}$$

$$H:\ln I=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x/\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

و) $I=\lim_{x\to\infty}(2+\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

حل:

$I=\infty^0$ مبهم

$$\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(2+\ln x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+\ln x)}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$H:\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)/(2+\ln x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\ln x}=0\Rightarrow I=e^0=1$$

هـ) $I=\lim_{x\to0^+}(x)^{\ln x^2}$

حل:

$I = 0^{\infty}$ ابهام دارد

$$\ln I = \lim_{x\to 0^+} \ln x^2 . \ln x = -\infty \times -\infty = +\infty \Rightarrow I = e^{-\infty} = +\infty$$

نکته مهم:

فرض کنید a, b, c, d اعداد ثابت باشند در آن صورت حدی مانند $I = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{lx+b}\right)^{cx+d}$ که البته ابهام از نوع 1^{∞} دارد پس از رفع ابهام جوابی به صورت زیر خواهد داشت:

$$I = e^{\frac{ac}{l}}$$

مثال : مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $I = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^{x}$

حل:

$$I = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x} \Rightarrow I = e^{\frac{-3}{2}(1)} = e^{\frac{-3}{2}}$$

ب) $I = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3x}$

حل:

$$I = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{3x} \Rightarrow I = e^{4\times 3} = e^{12}$$

ج) $I = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3i}{x+6}\right)^{\frac{\pi x}{4}+7}$

حل:

$$I = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3i}{x+6}\right)^{\frac{\pi x}{4}+7} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$I = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: مقدار ثابت c را طوری تعیین کنید تا حاصل حد $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-c}{2x+c}\right)^x$ برابر عدد 3 شود.

حل:

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-c}{2x+c}\right)^x=1^\infty \quad \text{مبهم}$$

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+c-2c}{2x+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2c}{2x+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2c}{2x+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-c}{x+\frac{c}{2}}\right)^x$$

از طرفی می‌دانیم که $I=3$ پس داریم:

$$e^{-c}=3 \Rightarrow -c=\ln 3 \Rightarrow c=-\ln 3=\ln\frac{1}{3}$$

نکته مهم در ارتباط با پیوستگی

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته باشند می‌توان نشان داد توابع $f(x)+g(x)$ ، $f(x)-g(x)$ ، $f(x)\times g(x)$ ، $fog(x)$ ، $gof(x)$ ، $e^{f(x)}$ نیز پیوسته می‌باشند. و همچنین تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ بجز در ریشه های مخرج همه جا پیوسته است و همچنین تابع $\ln(f(x))$ برای تمام x هایی که $f(x)>0$ است پیوسته می باشد.

مثال: نقاط گسستگی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\frac{1}{4^x+2^x-2}$

حل:

فرض می کنیم. $2^x=A$ $\qquad 4^x+2^x-2=0$

$$A^2+A-2=0 \Rightarrow (A+2)(A-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=-2 & \text{غیر قابل قبول} \\ A=1 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$A=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow \log_2^1=x \Rightarrow x=0$$

پس تابع در نقطه $x=0$ نا پیوسته است.

ب) $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

حل:

$$x^2-|x|=0 \Rightarrow |x|^2-|x|=0 \Rightarrow |x|(|x|-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} |x|=0 \\ |x|=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس تابع در سه نقطه فوق گسسته است.

ج) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\ln^2 x+3\ln x+2}$

حل:

$$\ln^2 x+3\ln x+2=0 \Rightarrow (\ln x+2)(\ln x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\ln x=-2\\ \ln x=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{e^2}\\ x=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

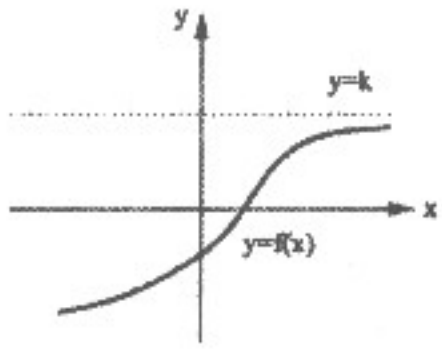
تابع فوق در دو نقطه $\begin{cases}x=\dfrac{1}{e^2}\\ x=\dfrac{1}{e}\end{cases}$ ناپیوسته می‌باشد.

« مجانب »

بطور کلی خطوط مجانب یک تابع رفتار منحنی آن تابع را در بی نهایتها نشان می‌دهد و یک منحنی در حالت کلی می‌تواند دارای سه نوع خط مجانب باشد که عبارتند از:

الف) مجانب افقی تابع $y = f(x)$:

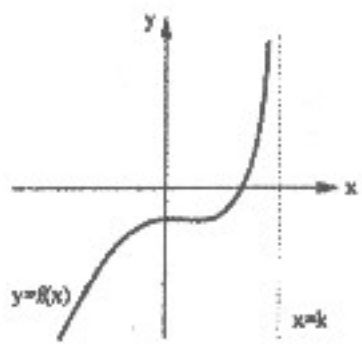
هرگاه $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ باشد آنگاه می‌گوییم $y = k$ مجانب افقی تابع مورد نظر است.



نکته: دقت کنید در محاسبه $\lim_{x\to\infty} f(x)$ اگر حاصل حد برای وضعیتهای $\begin{cases} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$ متفاوت باشد باید هر دو حالت را بصورت جداگانه بررسی کرد.

ب) مجانب قائم تابع $y = f(x)$:

اگر $x \to k$ داشته باشیم $y \to \infty$ آنگاه خط $x = k$ را مجانب قائم تابع مورد نظر می‌گوییم .



نکته : معمولاً برای توابع کسری به فرم $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ کاندیدای مجانب قائم از حل معادله $Q(x) = 0$ پیدا می‌شود ولی باید دقت کنیم اگر $x = k$ یکی از ریشه‌های معادله $Q(x) = 0$ باشد زمانی $x = k$ را می‌توان به عنوان مجانب قائم تابع در نظر گرفت که :

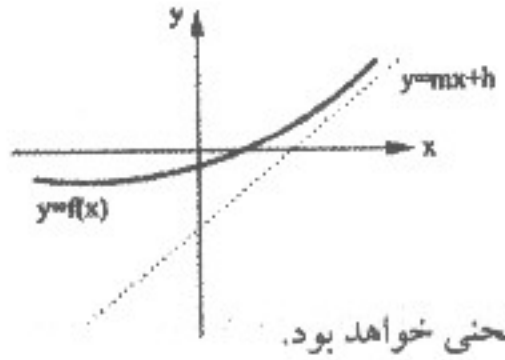
اولاً) تابع لااقل در یکی از همسایگی های این نقطه تعریف شده باشد.

ثانیاً) اگر $x=k$، $P(x)$ را نیز صفر کرد. باید نخست حاصل $\lim\limits_{x\to k}\frac{P(x)}{Q(x)}$ را محاسبه کرد و تنها اگر حاصل این حد بینهایت شد می‌توان گفت $x=k$ مجانب قائم تابع مورد نظر است.

نکته: در توابعی به فرم $y=\log_{u(x)}^{v(x)}$ معمولاً ریشه‌های معادله $u(x)=0$ کاندیدای مجانب قائم تابع می‌باشند.

ج) مجانب مایل تابع $y=f(x)$:

هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ باشد آنگاه ممکن است تابع دارای مجانب مایل باشد برای آنکه تشخیص دهیم مجانب مایلی وجود دارد یا خیر باید دو حد زیر را محاسبه کنیم:



$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$h=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)$$

چنانچه هر دو حد فوق موجود باشد آنگاه می‌توان گفت که $y=mx+h$ مجانب مایل منحنی خواهد بود.

نکته: درتوابع کسری به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که صورت و مخرج دو چند جمله‌ای می‌باشند اگر و فقط اگر درجه صورت یکی بیشتر از درجه مخرج باشد تابع دارای مجانب مایل است و معادله مجانب مایل همان خارج قسمت تقسیم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ است.

نکته: با توجه به هم ارزی زیر وقتی $x\to\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots}\sim\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & \text{وقتی n زوج است ،}\\ \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & \text{وقتی n فرد است ،}\end{cases}$$

می‌توان مجانبهای افقی و مایل توابع رادیکالی را در صورت وجود پیدا کرد.

مثال: مجانبهای توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x^2+4}$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

پس $y=2$ مجانب افقی می‌باشد در صورتیکه تابع مورد نظر فاقد مجانب مایل است.

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$

معادله فوق ریشه حقیقی ندارد پس تابع مجانب قائم ندارد.

ب) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2-4}$

حل:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$y=0$ مجانب افقی تابع است پس تابع مجانب مایل ندارد.

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$x=2$ و $x=-2$ معادله مجانبهای قائم تابع می‌باشند.

ج) $f(x)=x-\sqrt{x^2+6x+7}$

حل:

وقتی $x\to\infty$ داریم: $\sqrt{x^2+6x+7}\sim\left|x+\frac{6}{2}\right|$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x-|x+3|=\begin{cases}x\to+\infty \Rightarrow y=-3\\ x\to-\infty \Rightarrow y=2x+3\end{cases}$$

پس تابع مورد نظر مجانب افقی به معادله $y=-3$ و مجانب مایل به معادله $y=2x+3$ دارد.

د) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\begin{cases}x\to+\infty \Rightarrow y=1\\ x\to-\infty \Rightarrow y=-1\end{cases}$$

پس تابع فوق دارای دو مجانب افق به معادله‌های $y=1$ و $y=-1$ می‌باشد.

$e^x-e^{-x}=0 \Rightarrow e^x=e^{-x} \Rightarrow x=-x \Rightarrow x=0$

پس تابع مورد نظر دارای مجانب قائمی به معادله $x=0$ است.

م) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1-(\text{عبارت کراندار})}{\infty}=0$$

$y=0$ معادله مجانب افقی تابع می‌باشد پس تابع مجانب مایل ندارد.

اما از طرفی می‌دانیم که $x=0$ صورت کسر را علاوه بر مخرج آن صفر می‌کند پس باید حاصل حد زیر پس از رفع ابهام مشخص شود تا بتوانیم بگوییم که آیا تابع فوق مجانب قائم دارد یا خیر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{0}{0}$$

$$H:\lim_{x\to 0}\frac{+\sin x}{1}=0\neq\infty$$

پس $x=0$ مجانب قائم تابع نمی‌باشد.

ن) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2+x+1}$

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3 & x^2+x-1 \\ \hline x^3+x^2-x & x+1 \\ \hline x^2+x-3 & \\ x^2+x-1 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$y=x+1$ معادله مجانب مایل تابع فوق می‌باشد،

در ضمن تابع فوق مجانب افقی ندارد.

$$x^2+x+1=0\Rightarrow\Delta=1^2-4(1)(1)=-3<0$$

معادله $x^2+x+1=0$ ریشه حقیقی ندارد و تابع مجانب قائم ندارد.

و) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-10}}{x-1}$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-10}}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x+\frac{1}{2}\right|}{x-1}=\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y=1\\ x\to-\infty\Rightarrow y=-1\end{cases}$$

تابع دارای دو مجانب افقی به معادله های $y=1$ و $y=-1$ می‌باشد.

$$x-1=0\ \Rightarrow\ x=1$$

اما از طرفی چون $x=1$ در دامنه تابع نمی‌باشد پس مجانب قائم نخواهد بود.

هـ) $f(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

حل:

$$D_f:4-x^2>0\Rightarrow x^2<4\Rightarrow|x|<2\Rightarrow-2<x<2$$

$$D_f=(-2,2)$$

$$4-x^2=0\Rightarrow x=\pm2$$

اما چون دامنه تابع محدود به 2 و 2- است پس نمی‌تواند به سمت بی‌نهایتها میل کند و در نتیجه تابع مجانب افقی و مایل ندارد.

اما $x=2$ و $x=-2$ معادله مجانبهای قائم تابع می‌باشد.

ی) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2-1}$

حل:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ مبهم

$H: \lim_{x\to\infty} f(x) \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

$y=0$ معادله مجانب افقی است.

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

از طرفی می‌دانیم دامنه تابع $f(x)=\ln(x)$ بصورت $(0,+\infty)$ می‌باشد. پس $x=-1$ نمی‌تواند مجانب قائم تابع باشد. اما با کمی دقت پی می‌بریم که $x=1$ صورت کسر را نیز صفر می کند پس داریم:

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{0}{0}$

$H: \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq\infty$

و در نتیجه $x=1$ نیز نمی‌تواند مجانب قائم منحنی باشد.

اما چون $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{\ln(0^+)}{(0)^2-1}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$ پس $x=0$ مجانب قائم تابع است.

مثال: در تابع $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{x^2+2x+a}$ می‌دانیم $x=2$ مجانب تابع است مجانبهای دیگر تابع کدام است؟

حل:

چون $x=2$ مجانب قائم است پس داریم :

$x^2+2x+a\big|_{x=2}=0 \Rightarrow 4+4+a=0 \Rightarrow a=-8$

$f(x)=\frac{-8x^2+x+1}{x^2+2x-8} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=-8$

پس $y=-8$ مجانب افقی می‌باشد

مثال: اگر $y=5$ یکی از مجانبهای تابع $f(x)=\frac{(a+1)x^2+3x}{x^2-a}$ باشد مجانبهای دیگر را پیدا کنید.

حل:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=a+1 \Rightarrow a+1=5 \Rightarrow a=4$

$f(x)=\frac{4x^2+3x}{x^2-4}$

بنابراین $x=\pm 2$ مجانبهای قائم تابع می‌باشد.

مثال : تابع $f(x)=x\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}$ دارای مجانبی بصورت $y=(3k+1)x+h$ می‌باشد k را بدست آورید.

حل:

$$3k+1=m \quad , \quad m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow 3k+1=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}=\sqrt{4}=2$$

$$3k+1=2 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

مثال : تابع $f(x)=ax+\sqrt{x^2+4x-1}$ دارای مجانبی به معادله $y=3x-2$ می‌باشد مجانب دیگر را پیدا کنید.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}ax+\sqrt{x^2+4x-1}=\lim_{x\to\infty}ax+\left|x+\frac{4}{2}\right|=\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y=(a+1)x+2\\ x\to-\infty\Rightarrow y=(a-1)x-2\end{cases}$$

از آنجا که $y=3x-2$ در تطابق با $y=(a-1)x-2$ می‌باشد پس داریم:

$$a-1=3\Rightarrow a=4$$

و مجانب دیگر تابع عبارت است از:

$$y=5x+2$$

نکته: در توابعی به فرم $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ محل تلاقی مجانبهای افقی و قائم مرکز تقارن منحنی را نشان می‌دهد.

نکته: در توابعی به فرم $\frac{ax^2+bx+c}{dx+c}$ محل تلاقی مجانبهای مایل و قائم مرکز تقارن منحنی را نشان می‌دهد.

مثال: مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که تابع $f(x)=\frac{ax+3}{2x-b}$ دارای مرکز تقارن $(3,-4)$ باشد.

حل:

مجانب قائم : $2x-b=0\Rightarrow x=\frac{b}{2}$

مجانب افقی : $y=\frac{a}{2}$

پس داریم:

$$\frac{a}{2}=-4\Rightarrow a=-8$$

$$\frac{b}{2}=3\Rightarrow b=6$$

« مشتق »

می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه:

اولاً) تابع دراین نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً) مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

- دقت کنید حاصل حدهای روبرو در صورت وجود مبین مشتق خواهد بود:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

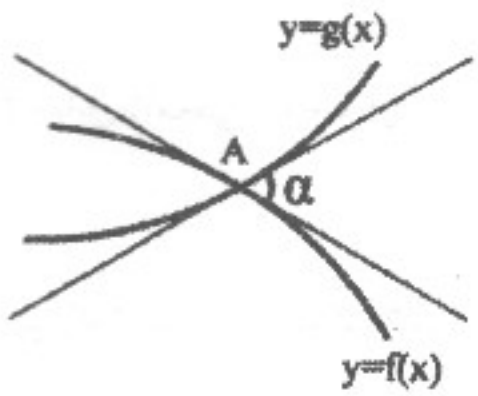
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

توجه : مشتق درهر نقطه از منحنی یک تابع، شیب خط مماس بر نمودار آن تابع را در نقطه مذکور نشان می‌دهد. البته عکس قرینه آن، شیب خط قائم بر آن منحنی در نقطه مذکور را نشان می‌دهد.

$$\left.\begin{matrix}\text{شیب خط مماس } m\\ \text{شیب خط قائم } m'\end{matrix}\right\} \Rightarrow mm'=-1$$

توجه : بطور کلی نقاط نوک تیز در نمودار یک تابع عدم مشتق پذیری آن تابع در آن نقطه را نشان می‌دهد زیرا تابع در آن نقطه قطعاً خط مماس ندارد اگرچه می‌توان در اطراف آن نقطه یعنی در همسایگی های آن، دو خط مماس بر نمودار تابع رسم کرد که در حقیقت این دو خط مماس مبین مشتقات چپ و راست تابع در نقطه مذکور می‌باشد.

توجه: برای محاسبه زاویه بین دو منحنی درهر نقطه از محل تلاقیشان کافی است زاویه بین خطوط مماس بر آن دو منحنی در محل برخوردشان را محاسبه کنیم . به شکل زیر دقت کنید:



$f'(x)\big|_A=m_1$: شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه A

$g'(x)\big|_A=m_2$: شیب خط مماس بر منحنی $g(x)$ در نقطه A

حال می‌توان گفت:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

مثال: مقادیر a, b را طوری پیدا کنید تا تابع زیر در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2x & , x < 1 \\ x^2 + b\ln x & , x \geq 1 \end{cases}$$

حل:

اولاً تابع باید در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد پس داریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} ax^3 + 2x = \lim_{x\to 1^+} x^2 + b\ln x \Rightarrow a(1)^3 + 2(1) = (1) + b\ln(1) \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

ثانیاً مشتق چپ و مشتق راست تابع نیز باید در $x = 1$ باهم برابر باشند، لذا داریم:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \left(ax^3 + 2x\right)'\Big|_{x=1} = \left(x^2 + b\ln x\right)'\Big|_{x=1} \Rightarrow 3a(1)^2 + 2 = 2(1) + \frac{b}{1} \Rightarrow 3a + 2 = 2 + b \Rightarrow b = -3$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ مفروض است، آیا این تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ آیا این تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیراست؟ و اگر مشتق پذیر است $f'(0)$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \times \sin\infty = 0 \times \text{عبارت کراندار} = 0$$

چون $f(0) = 0$ می‌باشد پس تابع در $x = 0$ پیوسته است.

دقت کنید مادر این مسئله مجاز نیستیم ازضابطه $x^2 \sin\frac{1}{x}$ مشتق بگیریم زیرا اساساً در $x = 0$ نا معین است، اما داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

پس $f'(0)$ موجود و برابر صفر است.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 \ln x + 3x$ درنقطه‌ای بطول $x = 1$ از آن منحنی را بدست آورید.

حل:

می‌دانیم معادله خطی که از نقطه (x_0, y_0) بگذرد و دارای شیب m باشد بصورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ بیان می‌شود.

$$f'(x) = 2x\ln x + x + 3$$

شیب خط مماس: $f'(1)=2\times\ln(1)+1+3=4 \Rightarrow m=4$

$x=1\Rightarrow y=1\times\ln(1)+3(1)=3$

$y-3=4(x-1)\Rightarrow y=4x-4+3\Rightarrow y=4x-1$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ چنین است:

$y=4x-1$

مثال: بر منحنی $y=3x+e^{-2x}$ در نقطه‌ای بطول صفر خط قائمی رسم کرده‌ایم، این خط محور طول ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

حل:

شیب خط مماس: $y'=3-2e^{-2x}\Rightarrow y'(0)=3-2e^{0}=3-2=1$

شیب خط قائم: $m'=-\frac{1}{1}=-1$

$x=0\Rightarrow y=3(0)+e^{0}=1$

$y-1=-1(x-0)\Rightarrow y=-x+1$

معادله خط قائم بصورت بالا می‌باشد.

حال اگر قرار باشد محور طولها را قطع کند باید محل تقاطع خط با $y=0$ را بدست آوریم، لذا داریم:

$0=-x+1\Rightarrow x=1$

پس خط قائم محور طولها را در نقطه $x=1$ قطع می‌کند.

مثال: منحنی $f(x)=x^3+x^2+3x-1$ مفروض است نقطه A به طول $x=-1$ و نقطه B به طول $x=1$ برروی این منحنی را به هم وصل کرده‌ایم، نقطه‌ای از منحنی را پیدا کنید که خط مماس در آن جا موازی پاره خط AB باشد.

حل:

شیب خط $AB=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$A: x=-1\Rightarrow y=-1+1-3-1=-4$

$B: x=1\Rightarrow y=1+1+3-1=4$

شیب پاره خط AB: $m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-(-4)}{1-(-1)}=4$

از طرفی داریم:

شیب خط مماس برتابع در هر نقطه: $f'(x)=3x^2+2x+3$

$$3x^2+2x+3=4 \Rightarrow 3x^2+2x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=-1 \end{cases}$$

مثال: زاویه بین دو منحنی $y=e^{2x}+x-1$ و $y=e^x-1$ را بدست آورید.

حل:

محل تقاطع دو تابع : $e^x-1=e^x+x-1 \Rightarrow x=0$

$$y_1=e^x-1 \Rightarrow y_1'=e^x \Rightarrow y_1'(0)=e^0=1 \Rightarrow m_1=1$$

$$y_2=e^{2x}+x-1 \Rightarrow y_2'=2e^{2x}+1 \Rightarrow y_2'(0)=2+1=3 \Rightarrow m_2=3$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{1-3}{1+3(1)}\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\text{Arc}\tan\left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال: در مورد توابع $f(x)$ و $g(x)$ اطلاعات زیر در دسترس است:

$$f(4)=1 \qquad \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(x)}{x-4}=-3$$

$$g(4)=3 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(4+h)-g(4)}{h}=2$$

اگر فرض کنیم $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد حاصل $y'(4)$ کدام است؟

حل:

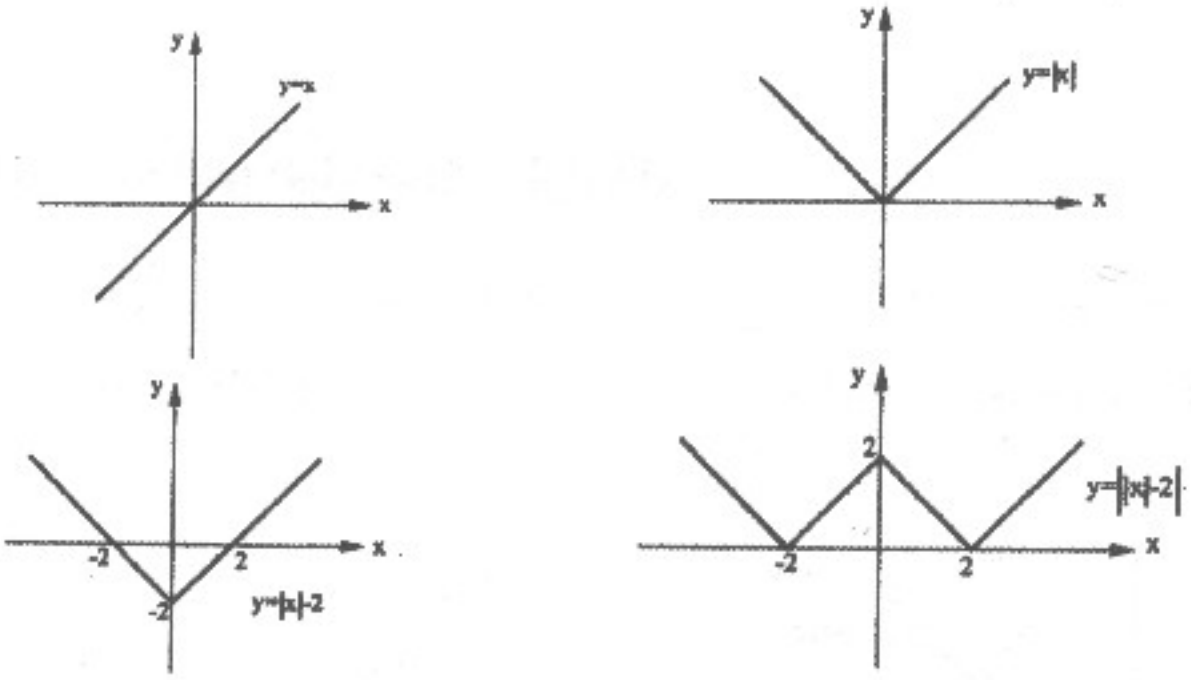
$$\begin{cases} f'(4)=-3 \\ g'(4)=2 \end{cases} \qquad y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x).g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{f'(4).g(4)-g'(4).f(4)}{g^2(4)}=\frac{(-3)(3)-(2)(1)}{3^2}$$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{-11}{9}$$

مثال: تابع $y=\big||x|-2\big|$ در چند نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد؟

حل: ابتدا نمودار تابع فوق را رسم می کنیم.



پس با توجه به شکل تابع می‌توان گفت که در سه نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد.

نکته: تابع $y=|P(x)|$ که در آن $P(x)$ یک چند جمله‌ای است را در نظر بگیرید:

اولاً) این تابع در همه جا پیوسته است.

ثانیاً) این تابع درهمه جا بجز ریشه‌های ساده $P(x)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $y=\left|(x^3-1)(x^2-1)x^2\right|$ در چند نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد.

حل:

$$(x^3-1)(x^2-1)x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3=1 \Rightarrow x=1 & \text{ریشه ساده} \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 & \text{ریشه ساده} \\ x^2=0 \Rightarrow x=0 & \text{ریشه مضاعف} \end{cases}$$

پس تابع فقط در نقطه $x=-1$ ریشه ساده داشته و در همین نقطه مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x)=(x-2)\lfloor x \rfloor$ رااز حیث پیوستگی و مشتق پذیری در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-2)\lfloor x\rfloor=0\times 2=0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-2)\lfloor x\rfloor=0\times 1=0$$
$$f(2)=(2-2)\lfloor 2\rfloor=0\times 2=0$$

پس تابع در $x=2$ پیوسته است.

اما از طرفی به دلیل وجود $\lfloor x \rfloor$ نمی‌توانیم مستقیماً از تابع مشتق بگیریم پس از تعریف مشتق استفاده می کنیم و داریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\lfloor x\rfloor-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor=\lfloor 2^+\rfloor=2$$
$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\lfloor x\rfloor-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor=\lfloor 2^-\rfloor=1$$

مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطه $x=2$ باهم برابر نیستند پس تابع در نقطه $x=2$ مشتق پذیر نمی‌باشد.

تحت مماس،تحت قائم، طول مماس ، طول قائم

به شکل زیر دقت کنید، فرض کنید در نقطه‌ای مانند $A(x,y)$ بر منحنی تابع $y=f(x)$ خطی مماس و خطی قائم رسم کرده‌ایم، چنانچه محل تقاطع این دو خط با محور xها T و N و تصویر نقطه A بر محور xها را H بنامیم، مطابق تعریف می گوییم:



تحت مماس : TH

تحت قائم : NH

طول مماس : AT

طول قائم : AN

از آنجا که مشتق به ازاء مختصات نقطه تماس شیب خط مماس را می‌دهد می‌توان نوشت:

تحت مماس : $\overset{\Delta}{ATH}: \tan\theta = \frac{AH}{TH} \Rightarrow y' = \frac{y}{TH} \Rightarrow TH = \frac{y}{y'}$

طول مماس : $\overset{\Delta}{ATH} \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} AT^2 = AH^2 + TH^2 \Rightarrow AT = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}$

تحت قائم : $\overset{\Delta}{ATN}: AH^2 = TH.HN \Rightarrow y^2 = \frac{y}{y'}.HN \Rightarrow HN = yy'$

طول قائم: $\overset{\Delta}{AHN} \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} AN^2 = AH^2 + HN^2 \Rightarrow AN = \sqrt{y^2 + (yy')^2}$

همگی روابط فوق را باید در مختصات نقطه A حساب کنیم و البته هر کدام که منفی شد قدر مطلقش را گزارش می کنیم.

مثال: در منحنی $y = x^3 + x^2$ مقادیر تحت مماس، تحت قائم، طول مماس و طول قائم را در نقطه‌ای به طول یک محاسبه کنید.

حل:

$$y(1) = 1+1 = 2$$
$$y'(1) = 3(1)^2 + 2(1) = 5$$
$$\text{تحت مماس} = \left|\frac{y}{y'}\right| = \frac{2}{5}$$
$$\text{تحت قائم} = |yy'| = |2\times 5| = 10$$

$$\text{طول مماس} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{104}}{5} = \frac{2\sqrt{26}}{5}$$

$$\text{طول قائم} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{4 + 100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

توابع هیپربولیک

مطابق تعریف داریم:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

و می‌توان نشان داد:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

تابع	مشتق
$\sinh u$	$u' \cosh u$
$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\tanh u$	$u'\left(1 - \tanh^2 u\right)$
$\coth u$	$u'\left(1 - \coth^2 u\right)$

مثال: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $y = \ln\left(x^3 \ln x - x\right)$

حل:

$$y' = \frac{3x^2 \ln x + x^2 - 1}{x^3 \ln x - x}$$

ب) $y = \text{Arc}\tan\left(x^3 + x + 1\right)^5$

حل:

$$y' = \frac{5\left(3x^2 + 1\right)\left(x^3 + x + 1\right)^4}{1 + \left[\left(x^3 + x + 1\right)^5\right]^2}$$

ج) $y = e^{\cos(\sin x)}$

حل:

$$y' = \left[\cos(\sin x)\right]'.e^{\cos(\sin x)} = -\cos x.\sin(\sin x).e^{\cos(\sin x)}$$

د) $y = \cosh^5\left(x^2+x+1\right)^3$

حل:

$$y' = 5.\cosh^4\left(x^2+x+1\right)^3.\left(\cosh\left(x^2+x+1\right)^3\right)'$$

$$y' = 5\cosh^4\left(x^2+x+1\right)^3.\left[3\left(x^2+x+1\right)^2(2x+1)\sinh\left(x^2+x+1\right)^3\right]$$

هـ) $y = \sqrt[5]{\left(x^2+x+1\right)^3}$

حل:

$$y = \left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y' = \frac{3}{5}(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{\frac{-2}{5}} \Rightarrow y' = \frac{3}{5}(2x+1)\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$$

چند قاعده مشتق گیری

الف) قاعده مشتق گیری ضمنی:

فرض کنید داشته باشیم $f(x,y)=0$، در چنین شرایطی اصطلاحاً می گوییم رابطه بین x و y بطور ضمنی بیان شده است و می‌توان نشان داد:

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y} \qquad x'_y=\frac{-f'_y}{f'_x}$$

- منظور از f'_x آن است که از f با فرض ثابت بودن y نسبت به x مشتق بگیریم.
- منظور از f'_y آن است که از f با فرض ثابت بودن x نسبت به y مشتق بگیریم.

مثال: معادله یک منحنی بصورت $x^3y+y^2\ln x=x+y^3-1$ داده شده است، مطلوب است شیب خط مماس بر این منحنی در نقطه‌ای از این منحنی با مختصات $(1,1)$.

حل:

$$x^3y+y^2\ln x-x-y^3+1=0$$

در $x=y=1$ داریم:

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}=-\left.\frac{3x^2y+\frac{y^2}{x}-1-0+0}{x^3+2yLnx-0-3y^2+0}\right|_{(1,1)}=-\frac{3+1-1}{1-3}=\frac{3}{2}$$

توجه: اگر یک رابطه بصورت ضمنی داده شده باشد و برای محاسبه y' نخواهیم از فرمول گفته شده استفاده کنیم و یا اصولاً هدف محاسبه y''_x باشد (که فرمولی نداریم)، می‌توانیم از رابطه داده شده نسبت به متغیر x مشتق گیری کنیم البته توجه داریم که y تابعی از x است.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $x^5+y^3+xy=3$ مطلوب است محاسبه y''_{xx} در نقطه $x=y=1$ ؟

حل:

از دو طرف رابطه داده شده نسبت به متغیر x مشتق می گیریم (y تابعی از x است).

$$5x^4+3y'y^2+y+xy'=0 \Rightarrow 5(1)^4+3y'(1)^2+1+(1)(y')\Rightarrow y'=\frac{-6}{4}$$

از رابطه فوق مجدداً نسبت به x مشتق می گیریم. بنابراین خواهیم داشت.

$$20x^3+3y''y^2+6yy'^2+y'+y'+xy''=0$$

$$20(1)^3+3y''(1)^2+6(1)\left(\frac{-6}{4}\right)^2+\left(\frac{-6}{4}\right)+\left(\frac{-6}{4}\right)+(1)y''=0$$

$$20+3y''+\frac{27}{2}-3+y''=0\Rightarrow 4y''=-20-\frac{27}{2}+3\Rightarrow y''=\frac{-61}{8}$$

ب) قاعده مشتق گیری پارامتری :

فرض کنید y و x بر حسب پارامتری مانند t به فرم زیر بیان شده است:

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$$

می‌توان نشان داد:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$x'_y=\frac{dx}{dy}=\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

و همچنین داریم :

$$y''_{xx}=\frac{g''(t).f'(t)-f''(t).g'(t)}{(f'(t))^3}$$

مثال: رابطه پارامتری زیر مفروض است، مطلوب است محاسبه y'_x و y''_{xx} در نقطه $t=1$.

$$\begin{cases}x=t^2+t+1\\y=t^3+5t\end{cases}$$

حل:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+5}{2t+1}\quad\Rightarrow\quad y'_x\Big|_{t=1}=\frac{8}{3}$$

$$y''_{xx} = \frac{6t(2t+1)-2(3t^2+5)}{(2t+1)^3} \quad \Rightarrow \quad y''_x\Big|_{t=1} = \frac{18-16}{27} = \frac{2}{27}$$

ج) قاعده مشتق گیری زنجیره‌ای:

فرض کنید داشته باشیم:

$$y = f(u) \quad , \quad u = g(t) \quad , \quad t = h(x)$$

در چنین شرایطی طبیعی است که y را می‌توان تابعی از تنها یک متغیر به نام x دانست و می‌توان نوشت:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم: $x = \ln(u^2+u-1)$ ، $t = e^{x^2-x}$ ، $y = \frac{t^2}{t+1}$ مطلوب است محاسبه y'_u به ازای $u=1$

حل:

$$y'_u = \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}.\frac{dx}{du}$$

$$y'_u = \frac{2t(t+1)-t^2}{(t+1)^2}.(2x-1)e^{x^2-x}.\frac{2u+1}{u^2+u-1}$$

$$u=1 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad t=1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}$$

$$y'_u = \frac{4-1}{4}.(-1)(1).\frac{3}{1} = \left(\frac{3}{4}\right).(-1).3 = \frac{-9}{4}$$

د) قاعده مشتق گیری از تابع مرکب :

فرض کنید $g(x)$ و $f(x)$ دو تابع معلوم باشند می‌توان نشان داد اگر:

$$y = fog(x) = f(g(x))$$

داریم:

$$y' = g'(x).f'(g(x))$$

مثال: می‌دانیم $f(6x) = 3x + f(x^2+1) + \sin(f(x))$ چنانچه بدانیم $f(0) = 0$ می باشد مطلوب است محاسبه $f'(0)$.

حل:

نخست از طرفین رابطه داده شده مشتق گیری می کنیم:

$$6f'(6x) = 3 + 2x.f'(x^2+1) + f'(x).\cos(f(x))$$

اگر در $x = 0$ به رابطه فوق نگاه کنیم بدست می‌آوریم:

$$6f'(0) = 3 + 2(0)f'(1) + f'(0).\cos(0) \Rightarrow 6f'(0) = 3 + f'(0) \Rightarrow 5f'(0) = 3 \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{5}$$

مثال: چنانچه $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = -1$ باشد مطلوب است محاسبه مشتق $y = f(x^4 + x + 1)$ در نقطه $x = 1$.

حل:

می‌دانیم که رابطه بالا بیان کننده این مطلب است که :

$$f'(3) = -1$$

حال از طرفین تابع نسبت به x مشتق می گیریم :

$$y' = (4x^3 + 1).f'(x^4 + x + 1) \Rightarrow y'\Big|_{x=1} = 5.f'(3) \Rightarrow y' = -5$$

م) قاعده مشتق گیری از توابعی به فرم $y = f(x)^{g(x)}$:

روال کلی برای محاسبه مشتق توابعی به فرم $y = f(x)^{g(x)}$ آن است که از دو طرف رابطه ln بگیریم تا بدست آید:

$$\ln y = g(x).\ln(f(x))$$

سپس از دو طرف رابطه فوق مشتق گیری می کنیم تا تکلیف y' معلوم شود.

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln(f(x)) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow y' = \left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right).f(x)^{g(x)}$$

مثال: معادله خط قائم بر منحنی تابع $y=\left(x^2+x+1\right)^{(2x+1)}$ در نقطه‌ای به طول $x=-1$ واقع بر آن کدام است؟

حل:

$$x=-1 \Rightarrow y=(1-1+1)^{(-2+1)} \Rightarrow y=1$$

$$\ln y=(2x+1)\ln\left(x^2+x+1\right) \Rightarrow \frac{y'}{y}=2\ln\left(x^2+x+1\right)+(2x+1).\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow y'=\left[2\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}\right].\left(x^2+x+1\right)^{(2x+1)} \Rightarrow y'(-1)=m=\left(2\ln(1)+\frac{(-1)^2}{1}\right).1 \Rightarrow m=1$$

پس شیب خط قائم برابر است با $m'=-1$ در نتیجه داریم:

$$y-1=-1(x+1) \Rightarrow y=-x$$

ن) قاعده مشتق گیری از یک تابع نسبت به تابع دیگر:

برای محاسبه مشتق تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ (که در حقیقت نسبت سرعت تغییرات $f(x)$ به سرعت تغییرات $g(x)$ را توصیف می‌کند.) می‌توان نوشت:

$$\frac{df}{dg}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: مطلوب است محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^2.e^x$ نسبت به تابع $g(x)=x.\ln x$ به ازاء $x=1$.

حل:

$$\frac{df}{dg}=\frac{2x.e^x+x^2e^x}{\ln x+x.\frac{1}{x}} \xrightarrow{x=1} \frac{df}{dg}=\frac{2e+e}{0+1}=3e$$

و) قاعده مشتق گیری از انتگرال(قضیه لایب نیتس) :

فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt$$

می‌توان نشان داد:

$$f'(x)=v'(x).h\big(v(x)\big)-u'(x).h\big(u(x)\big)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_{\ln x}^{x^3}\frac{dt}{t^5+1}$ مطلوب است محاسبه $f'(1)$.

حل:

$$f'(x)=3x^2.\frac{1}{(x^3)^5+1}-\frac{1}{x}.\frac{1}{(\ln x)^5+1}=\frac{3x^2}{x^{15}+1}-\frac{1}{x\left((\ln x)^5+1\right)}\Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}-\frac{1}{1}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

مثال: حاصل حد زیر را بدست آورید.

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x+1}^{\cos x}\sqrt{t^3+1}\,dt}{x^2+x}$$

حل:

$$I=\frac{\int_1^1\sqrt{t^3+1}\,dt}{0}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$H:I=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\left(\sqrt{\cos^3 x+1}\right)-(1)\sqrt{(x+1)^3+1}}{2x+1}=\frac{(0)\sqrt{1+1}-(1)\sqrt{1+1}}{2(0)+1}=-\sqrt{2}$$

مشتق مرتبه n ام یک تابع :

فرض کنید y تابعی از متغیر x است چنانچه n بار متوالی از y نسبت به x مشتق بگیریم حاصل کار را مشتق مرتبه n ام y نامیده و آنرا با نماد $y^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه مشتق مرتبه nام یک تابع کافی است چند تا از مشتقات تابع مانند: y' و y'' و y''' و ... را محاسبه کرده و با یافتن یک روال منطقی بین آنها تکلیف $y^{(n)}$ را مشخص کنیم.

به روابط زیر دقت فرمایید:

$$y = e^{ax} \rightarrow y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال: مشتق مرتبه یازدهم تابع $y = \cos^3 x$ را در نقطه $x = 0$ بدست آورید.

حل:

قبل از حل این مسئله نکات زیر را به خاطر بسپارید:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \Rightarrow \cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

پس داریم:

$$y = \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$y^{(11)}(0) = \frac{1}{4}\left(3^{11} \cos\left(3x + \frac{11\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + \frac{11\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(3^{11}(0) + 3(0)\right) = 0$$

مثال : مشتق مرتبه هفدهم تابع $y = x\ln x$ را پیدا کنید.

حل:

$$y' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y'' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

$$y''' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y^{(4)} = \frac{+2}{x^3}$$

$$y^{(5)} = \frac{-6}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}} \Rightarrow y^{(17)} = \frac{(-1)^{17}.(15)!}{x^{16}} = \frac{-15!}{x^{16}}$$

« کاربرد مشتق »

الف)استفاده از مشتق برای تعیین وضعیت صعودی یا نزولی بودن یک تابع و یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع:

اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای پیوسته باشد، هرکجا $f'(x)>0$ باشد تابع اکیداً صعودی و هرکجا $f'(x)<0$ باشد تابع اکیداً نزولی است.

می‌دانیم نقاط اکسترمم نسبی یک تابع از منحنی آن تابع می‌باشند که نسبت به نقاط اطراف خود دارای کمترین یا بیشترین مقدار y می‌باشند.

با استفاده از علامت مشتق یک تابع می‌توان نقاط اکسترمم نسبی آن را تعیین کرد، بدین ترتیب که می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی است ، هرگاه در این نقطه معین بوده و علامت $f'(x)$ در مجاورت آن نقطه تغییر کند که نوع این اکسترمم را با توجه به جداول زیر می‌توان تعیین کرد:

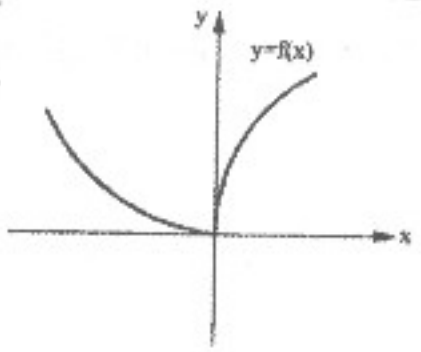
x		a	
f′	+	0	−
f	↗	max نسبی	↘

x		a	
f′	−	0	+
f	↘	min نسبی	↗

تعریف: نقاط بحرانی تابع $f(x)$ نقاطی هستند که $f'(x)$ در آنجا صفر است یا $f'(x)$ در آن نقاط موجود نمی‌باشد.

قضیه : هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ای دارای اکسترمم نسبی باشد و بدانیم در آنجا $f'(x)$ موجود است آنگاه قطعاً در آن نقطه $f'(x)=0$ است.

نمودار مقابل را در نظر بگیرید این منحنی در نقطه $x=0$ دارای min نسبی است اما از آنجا که $f'(0)$ اساساً موجود نمی باشد لذا مشتق برابر معنا ندارد که بگوییم $f'(0)$ صفر شده است، پس لازم به ذکر است که در هر نقطه که صفر نیست.



مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+x^2-5x+1$ و نوع آن را مشخص کنید.

حل:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{-5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=-2 \\ f\left(\dfrac{-5}{3}\right)=\dfrac{202}{27} \end{cases}$$

x		$\frac{-5}{3}$		1	
f′	+	0	−	0	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس تابع در نقطه $x=\frac{-5}{3}$ دارای max نسبی و در نقطه $x=1$ دارای min نسبی است.

مثال: وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=x^5-\frac{5}{3}x^3$ را در فواصل مختلف تعیین کرده و سپس نقاط اکسترمم نسبی و نوع آنها را نیز معین کنید.

حل:

در حل این نوع مسائل ابتدا باید دامنه تابع را مشخص کنیم تا بدانیم با کدام x ها در ارتباط هستیم . بدیهی است چون $f(x)$ یک چند جمله ای است پس دامنه اش $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-5x^2=0 \Rightarrow 5x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

x		-1		0		+1	
f'	+	0	-	0	-	0	+
f	↗		↘		↘		↗

پس تابع در فاصله $(-\infty,-1)$ اکیداً صعودی است.

تابع در فاصله $(-1,1)$ اکیداً نزولی است.

تابع در فاصله $(1,\infty)$ اکیداً صعودی است.

تابع در $x=1$ دارای min نسبی و در $x=-1$ دارای max نسبی است.

مثال: مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=ae^{2x}+x^2+bx$ در نقطه $(0,2)$ دارای اکسترمم نسبی باشد.

حل:

ابتدا مختصات نقطه مورد نظر در خود تابع باید صدق کند پس داریم:

$$f(0)=2 \Rightarrow ae^0+0+b(0)=2 \Rightarrow a=2$$

اگر نقطه مورد نظر اکسترمم نسبی باشد می‌طلبد که f' در آن نقطه تغییر علامت دهد و این زمانی برقرار است که مشتق در آن نقطه صفر شود پس داریم:

$$f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)=2ae^{2x}+2x+b \Rightarrow 2ae^0+2(0)+b=0 \Rightarrow 2a=-b \Rightarrow b=-4$$

مثال: مقادیر max و min نسبی تابع $\begin{cases} x=t-2t \\ y=t^2+4t \end{cases}$ را پیدا کنید.

حل: با استفاده از قاعده مشتق گیری پارامتری داریم :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+4}{2t-2}$$

برای تعیین علامت باید داشته باشیم $y'_x = 0$ یا y'_x موجود نباشد.

$$\begin{cases} 2t+4=0 \Rightarrow t=-2 \\ 2t-2=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

x		-2		1	
f′	+	0	−	0	+
f	↗	-4	↘	5	↗

پس max نسبی تابع برابر 4- و min نسبی تابع برابر 5 می‌باشد.

ب) استفاده از مشتق در تعیین وضعیت انحنا (تقعر و تحدب) یک تابع و تعیین نقاط عطف:

اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای پیوسته باشد، هرکجا $f''(x) > 0$ باشد تقعر منحنی به ست بالاست ($\cup$ تابع مقعر است) و هرجا $f''(x) < 0$ باشد تقعر منحنی به سمت پایین است ($\cap$ تابع محدب است).

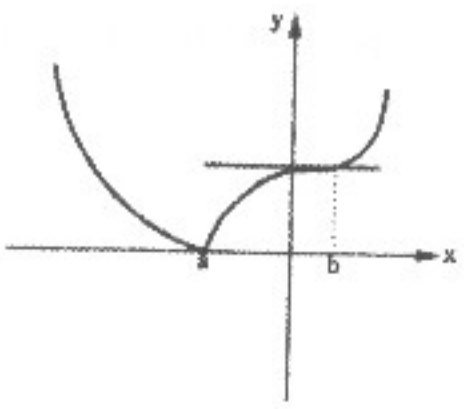
با استفاده از این موضوع می‌توان نقاط عطف یک تابع را مشخص کرد. بدین ترتیب که می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای عطف است هرگاه:

اولاً : تابع در این نقطه پیوسته باشد:

ثانیاً: نمودار تابع در آن نقطه دارای خط مماس واحد باشد (نقطه نوک تیز نباشد)

ثالثاً: جهت تقعر و تحدب تابع و به تعبیری علامت $f''(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کند.

شکل مقابل را در نظر بگیرید در مجاورت نقطه $x = a$ جهت تقعر و تحدب تابع عوض شده ولی تابع در این نقطه دارای عطف نمی‌باشد زیرا اساساً در این نقطه مماس واحد نداریم چون این نقطه نوک تیز است هرچند می‌توان گفت در $x = a$ تابع دارای min نسبی است. اما در تابع $x = b$ دارای نقطه عطف است چون خط مماس بر نمودار منحنی در نقطه عطف از داخل منحنی عبور کرده و اصطلاحاً منحنی را قطع کرده است.

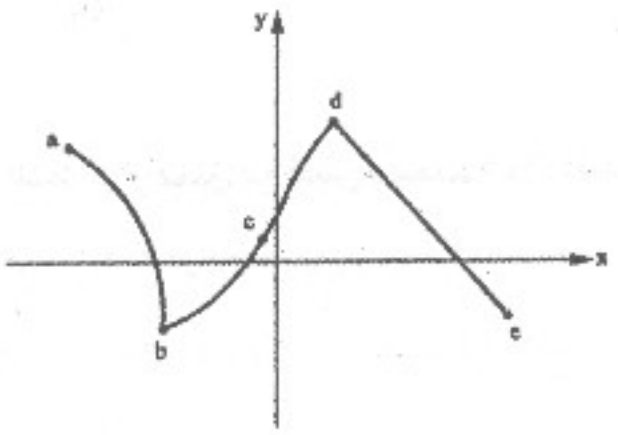


تعریف: هرگاه $f''(a)$ برابر صفر باشد ولی $f''(x)$ در اطراف $x=a$ تغییر علامت ندهد می‌توان گفت $x=a$ نقطه مپلا است.

قضیه : هرگاه $f'(a)$ باشد ولی $f'(x)$ در اطراف $x=a$ تغییر علامت ندهد آنگاه تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای عطف است.

نکته: ویژگی نقطه عطف یک تابع آن است که **اولاً** مختصات آن در ضابطه تابع صدق می‌کند، ثانیاً علامت مشتق دوم تابع در اطراف آن نقطه تغییر می‌کند یا به تعبیری مشتق دوم در آن نقطه صفر باشد.

مثال: نمودار تابعی در شکل زیر رسم شده است وضعیت علامت f' و f'' را در قسمتهای مختلف این منحنی مشخص کرده و همچنین بیان کنید نقاط e و d و c و b و a چه نقاطی می‌باشند؟



(b,c) : در فاصله $\begin{cases} f'(x)>0 \\ f''(x)>0 \end{cases}$

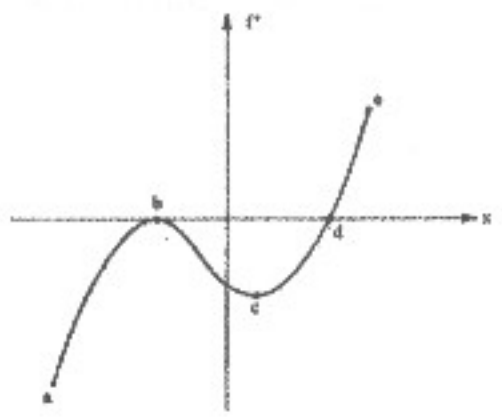
(a,b) : در فاصله $\begin{cases} f'(x)<0 & \text{تابع اکیداً نزولی پس} \\ f''(x)<0 & \text{تقعر تابع به سمت پایین پس} \end{cases}$

در این فاصله تابع خط می‌باشد پس داریم: (d,e) : در فاصله $\begin{cases} f'(x)<0 \\ f''(x)=0 \end{cases}$

(c,d) : در فاصله $\begin{cases} f'(x)>0 \\ f''(x)<0 \end{cases}$

بدیهی است که نقطه $\min$ b نسبی و نقطه $\max$ d نسبی است هرچند که تابع در آن نقاط نوک تیز است با اصطلاحاً مشتق در آن نقاط موجود نمی‌باشد. و نقطه c نقطه عطف منحنی تابع می‌باشد.

مثال: نمودار مشتق تابعی در شکل زیر ترسیم شده است در قسمتهای مختلف این نمودار وضعیت علامتهای f' و f'' را تعیین کرده و همچنین وضعیت منحنی را در نقاط d و c و b تعیین کنید.



$\begin{cases} f'(x)<0 \\ f''(x)<0 \end{cases}$: در فاصله (b,c) نمودار تابع زیر محور x ها می‌باشد پس : $f'(x)<0$ ، تابع اکیداً صعودی است پس : $f''(x)>0$: در فاصله (a,b)

$\begin{cases} f'(x)>0 \\ f''(x)>0 \end{cases}$: در فاصله (d,e) $\begin{cases} f'(x)<0 \\ f''(x)>0 \end{cases}$: در فاصله (c,d)

ملاحظه می‌شود که $f'(b)=0$ است ولی f' در اطراف $x=b$ تغییر علامت نداده پس $x=b$ نقطه عطف می باشد. در نقطه c ملاحظه می شود که $f''(c)=0$ است و f'' قبل و بعد از $x=c$ تغییر علامت داده پس نقطه $x=c$ نیز نقطه عطف می‌باشد. در نقطه d ملاحظه می‌شود که $f'(d)=0$ است و f' قبل و بعد از d تغییر علامت داده پس $x=d$ نقطه min نسبی است زیرا قبل از f' d منفی و بعد از f' d مثبت است و این همان تعریف min نسبی می‌باشد.

مثال: نقاط عطف توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\ln(x^2+4)$

حل:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4} \quad , \quad f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 8-2x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

x		−2		+2	
f″	−	0	+	0	−
f	∩	عطف	∪	عطف	∩

پس دو نقطه $x=\pm 2$ نقاط عطف می‌باشند.

ب) $f(x)=x+\ln x$

حل:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2}<0$$

از آنجا که مشتق دوم این تابع همیشه منفی است پس جهت تقعر همیشه به سمت پایین بوده و نقطه عطفی موجود نمی‌باشد.

مثال: برای تابع $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ نقاط اکسترمم نسبی و عطف را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=e^{-x}(2-2x-1)=(1-2x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-2e^{-x}-(1-2x)e^{-x}=e^{-x}(-2-1+2x)=(2x-3)e^{-x}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$	
f'	+	0	−
f	↗	max	↘

x		$\frac{3}{2}$	
f''	−	0	+
f	∪	عطف	∩

مثال: مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که تابع $f(x)=ax^2+b\ln x+x$ در نقطه‌ای به طول 1 اکسترمم نسبی و در نقطه‌ای به طول 2 دارای عطف باشد.

حل:

شرط آنکه تابع در $x=1$ دارای اکسترمم نسبی باشد می‌طلبد:

$$f'(1)=0\Rightarrow 2a(1)+b.\frac{1}{(1)}+1=0\Rightarrow 2a+b+1=0$$

و شرط آنکه تابع در $x=2$ دارای عطف باشد می‌طلبد:

$$f''(x)=2a-\frac{b}{x^2}\Rightarrow f'(2)=0\Rightarrow 2a-\frac{b}{4}=0\Rightarrow 8a=b$$

$$\begin{cases}2a+b+1=0\Rightarrow 2a+8a+1=0\Rightarrow a=\frac{-1}{10}\\ 8a=b \qquad\qquad\qquad\qquad b=\frac{-8}{10}\end{cases}$$

مثال: مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که تابع مقابل در نقطه $x=1$ خط مماسی داشته باشد که موازی محور xها است و از داخل منحنی عبور می‌کند. $f(x)=ax^3+bx^2+x$

حل:

چون خط مماس موازی محور xها است پس داریم $f'(1)=0$:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+1=0$$

و به خاطر عبور خط مماس از منحنی خواهیم داشت $f''(1)=0$:

$$f''(x)=6ax+2b\Rightarrow f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0$$

$$\begin{cases}3a+2b+1=0\\6a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=-1\end{cases}$$

مثال: تابع $f(x)=\frac{a}{8}x^4+\frac{b}{6}x^3+\frac{c}{4}x^2$ مفروض است چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار باشد تا تابع فوق فاقد نقطه عطف شود؟

حل:

بدیهی است برای آنکه تابع مورد نظر فاقد نقطه عطف باشد باید معادله $f''=0$ ریشه حقیقی نداشته باشد. پس داریم:

$$f'(x)=\frac{a}{2}x^3+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{2}x$$
$$f''(x)=\frac{3a}{2}x^2+bx+\frac{c}{2}$$

تابع $f''(x)$ یک معادله درجه 2 است پس وقتی $\Delta\le 0$ باشد این تابع یا ریشه حقیقی نداشته یا اگر داشته باشد. مضاعف است ولی می‌توان نتیجه گرفت که تابع فوق فاقد نقطه عطف خواهد بود.

$$\Delta\le 0\Rightarrow b^2-4\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\le 0\Rightarrow b^2-3ac\le 0\Rightarrow b^2\le 3ac$$

آزمون مشتق دوم

هر گاه $f'(a)=0$ می‌توان نشان داد:



۱ـ اگر $f'(a)>0$ باشد تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای min نسبی است.

۲ـ اگر $f''(a)<0$ باشد تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای max نسبی است.

۳ـ اگر $f''(a)=0$ باشد تابع $f(x)$ در $x=a$ ممکن است دارای max نسبی یا دارای min نسبی و یا حتی عطف باشد.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $y=xe^{-x}$ نقطه $x=1$ کدام یک از نقاط زیر است ؟

الف) ماکزیمم نسبی　　ب) می‌نیمم نسبی　　ج) عطف　　د) هیچکدام

حل:

$$y'=e^{-x}-xe^{-x}\Rightarrow y'(1)=e^{-1}-e^{-1}=0$$

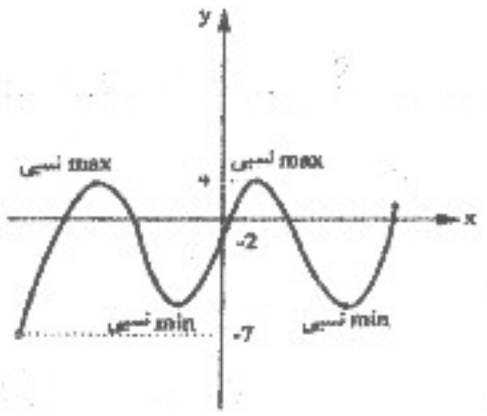
پس از آزمون مشتق دوم می‌توانیم بهره بگیریم و داریم:

$$y''=-e^{-x}-\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}-2e^{-x}$$
$$y''(1)=1e^{-1}-2e^{-1}=-e^{-1}=\frac{-1}{e}<0$$

پس تابع در نقطه $x=1$ بر طبق آزمون مشتق دوم دارای max نسبی است.

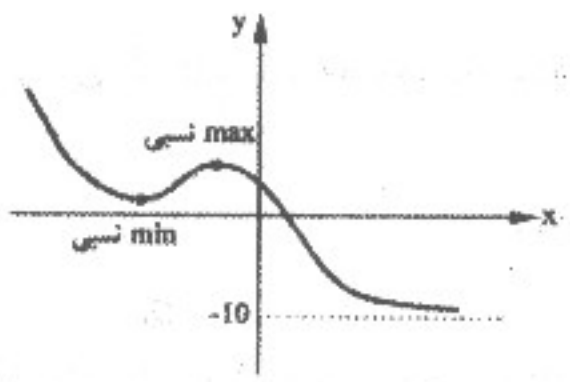
ج) استفاده از مشتق در تعیین مقادیر اکسترمم مطلق یک تابع:

نقاط اکسترمم مطلق یک تابع نقاطی از نمودار تابع هستند که در کل نمودار دارای بیشترین و کمترین مقدار y می‌باشند. توجه به این موضوع مهم است که مقادیر اکسترمم مطلق باید قابل حصول باشد و تنها نزدیک شدن به مقدار آنها کافی نیست.



در نمودار فوق max مطلق برابر 4 می‌باشد

در صورتیکه min مطلق وجود ندارد.



در نمودار فوق نه max مطلق و نه min مطلق

هیچکدام وجود ندارند.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد قطعاً در این فاصله دارای max و min مطلق خواهد بود و این مقادیر اکسترمم مطلق یا در یکی از نقاط بحرانی تابع که در فاصله مذکور واقع شده است و یا در نقاط مرزی a و b اتفاق می‌افتد.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای پیوسته باشد با استفاده از مقادیر اکسترمم مطلق می‌توان برد تابع را مشخص کرد.

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=x^2\ln x$ را در فاصله $\left[\frac{1}{e},e\right]$ پیدا کنید.

حل:

بدیهی است که تابع فوق در فاصله $\left[\frac{1}{e},e\right]$ پیوسته است.

$$f'(x)=2x\ln x+x^2.\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

با قرار دادن $f'=0$ نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

$$f'(x)=0\Rightarrow x(2\ln x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \ln x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{cases}$$

حال مقدار تابع را در سه نقطه : $x=e, x=1, x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ محاسبه می‌کنیم تا مقادیر max و min مطلق تابع بدست آید. نقطه $x=0$ عضوی از دامنه مورد نظر نیست پس محاسبه نمی‌شود.

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(e)=e^2 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{-1}{2e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مطلق } \max = e^2 \\ \text{مطلق } \min = \frac{-1}{2e} \end{cases}$$

مثال: برد تابع $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ را در فاصله $[-1,2]$ بدست آورید.

حل:

کاملاً واضح است که $f(x)$ در فاصله $[-1,2]$ پیوسته است.

$$f'(x)=3x^2+2x-5 \quad , \quad f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

اما $x=\frac{-5}{3}$ در فاصله مورد نظر قرار ندارد پس در نظر گرفته نمی‌شود.

پس داریم
$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=8 \\ f(2)=5 \end{cases} \Rightarrow R_f=[0,8]$$

مثال: برد تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را بیابید.

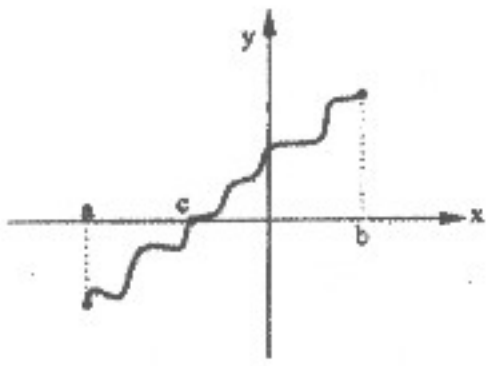
حل: بدیهی است که تابع مذکور در تمام دامنه‌اش یعنی $D_f=[0,+\infty)$ پیوسته است.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4} \\ f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow R_f=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$$

سه قضیه مهم

قضیه بولتزانو: هر گاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. و $f(a).f(b)<0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که حداقل یک c متعلق به فاصله (a,b) وجود دارد به طوریکه $f(c)=0$.



مثال: معادله $x^3+3x+3=0$ در کدام فاصله زیر دارای ریشه است؟

الف $[0,1]$ ب) $[-2,-1]$ ج) $[-1,0]$ د) $[2,3]$

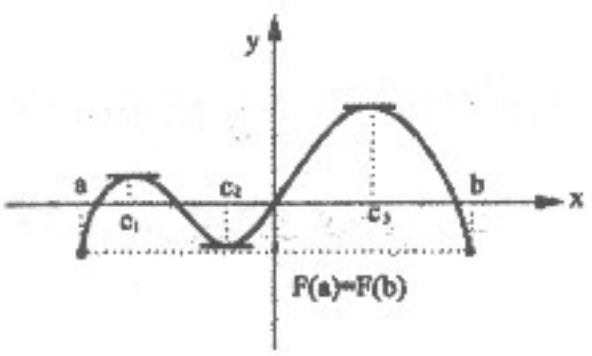
حل:

تابع چند جمله‌ای است پس در R پیوسته می‌باشد.

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(-1)=3(-1)=-3<0$$

پس تابع حداقل یک ریشه در بازه $[-1,0]$ دارد، اما اگر کمی دقت کنید می‌بینید که بقیه فواصل شرایط قضیه بولتزانو را ارضاء نمی‌کند.

قضیه رول: هر گاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)$، آنگاه می‌توان نشان داد **لااقل** یک c در فاصله (a,b) وجود دارد به طوریکه: $f'(c)=0$



مثال: c قضیه رول را برای تابع $f(x)=x^3-9x$ در فاصله $[0,3]$ بیابید.

حل:

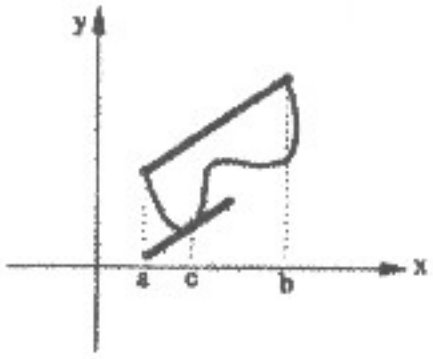
تابع $f(x)$ در R پیوسته و همه جا مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(3)=0$ پس شرایط قضیه رول را ارضاء می‌کند و داریم:

$$f'(x)=3x^2-9$$

$$f'(c)=3c^2-9=0 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{قابل قبول } C=\sqrt{3}$$

چون $C=-\sqrt{3}$ درباره $[0\ ,\ 3]$ نمی‌باشد پس قابل قبول نمی‌باشد.

قضیه لاگرانژ (قضیه مقدار میانگین در مشتق): هر گاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه می‌توان گفت شرایط قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ برقرار است و می‌توان نشان داد که لااقل یک c در فاصله (a,b) وجود دارد به طوریکه: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



مثال: c قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x)=x+\sin x$ را در فاصله $[0,\pi]$ بدست آورید.

حل:

تابع $f(x)=x+\sin x$ همه جا پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f'(x)=1+\cos x \Rightarrow f'(c)=1+\cos(c)$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)}{\pi-0}=1$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=1+\cos c \Rightarrow 1=1+\cos(c) \Rightarrow \cos(c)=0 \Rightarrow c=\frac{\pi}{2}$$

د) استفاده از مشتق برای تعیین مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه:

فرض کنید $y=f(x)$ باشد چنانچه متغیر x از مقدار اولیه x_1 به مقدار ثانویه x_2 برسد، نمو متغیر $\Delta x=x_2-x_1$ خواهد بود و طبیعی است در این شرایط نمو تابع چنین است:

$$\Delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$$

مطابق تعریف مشتق تابع $y=f(x)$ را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

توجه کنید از رابطه فوق می‌توان گفت اگر Δx به اندازه کافی کوچک باشد داریم:

$$\Delta y=f'(x).\Delta x$$
$$f(x+\Delta x)\simeq f'(x)\Delta x+f(x)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=x^2+10x+3$ چنانچه مقدار متغیر از $x=10$ نموی به اندازه $\Delta x=1$ داشته باشد، اولاً: مقدار دقیق تغییرات y را حساب کنید ثانیاً: با استفاده از مشتق مقدار تقریبی تغییرات y را پیدا کنید.

حل:

$$f(10)=100+100+3=203$$
$$f(10+1)=121+110+3=234$$

مقدار دقیق تغییرات f: $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=f(11)-f(10)=234-203=31$

$$f'(x)=2x+10$$

مقدار تقریبی تغییرات f: $\Delta f=f'(x).\Delta x=(2(10)+10)(1)=30$

مثال: مقدار تقریبی $\ln(1.01)$ را پیدا کنید.

حل:

$$f(x)=\ln x \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$
$$x_0=1 \quad , \quad \Delta x=0.01$$
$$f(x_0+\Delta x)=f'(x_0).\Delta x+f(x_0)$$
$$\ln(1.01)=\frac{1}{1}(0.01)+\ln(1)=0+\frac{1}{100}=0.01$$

مثال: مقدار تقریبی $\text{Arctg}(1.1)$ را بدست آورید.

حل:

$$f(x)=\text{Arc tg}x \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
$$x_0=1, \Delta x=0.1$$
$$f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$$
$$\text{Arc tg}(1.1)=\frac{1}{1+1}(0.1)+\text{Arc tg}(1)=\frac{1}{20}+\frac{\pi}{4}$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin(29)^0$ را پیدا کنید.

حل:

$$f(x)=\sin x \quad , \quad f'(x)=\cos x$$
$$x_0=30^0, \ \Delta x=-1^0=\frac{-\pi}{180}\text{Rad}$$
$$f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$$
$$\sin(29^0)=\cos(30).\frac{-\pi}{180}+\sin(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{-\pi}{180}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$$

مثال: یک مقدار تقریبی برای ریشه سوم 63 محاسبه کنید.

حل:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\ ,\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$x_0=64\ ,\ \Delta x=-1$$

$$f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$$

$$\sqrt[3]{63}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}.(-1)+\sqrt[3]{64}=\frac{-1}{3(16)}+4=\frac{191}{48}$$

م) استفاده از مشتق در تعیین دیفرانسیل یک تابع:

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید مطابق تعریف داریم:

دیفرانسیل مرتبه اول f: $df=f'(x).dx$

دیفرانسیل مرتبه دوم f: $d^2f=f''(x).dx^2$

دیفرانسیل مرتبه nام f: $d^nf=f^{(n)}(x).dx^n$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $x^3y^2-y^3+x^2=1$ مطلوب است محاسبه dy به ازاء $x=y=1$.

حل:

از طرفین رابطه فوق با فرض متغیر بودن x و تابع بودن y مشتق می‌گیریم:

$$3x^2y^2+x^3(2yy')-3y'y^2+2x=0\Rightarrow y'(2x^3y-3y^2)=-2x-3x^2y^2$$

$$y'=\frac{-2x-3x^2y^2}{2x^3y-3y^2}\Rightarrow y'(1)=5$$

$$dy=y'(x).dx\Rightarrow dy=y'(1).dx\Rightarrow dy=5dx$$

مثال: دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $y=\int_1^{\ln x}\ln t\,dt$ را در $x=e$ محاسبه کنید.

حل:

$$f'(x)=\frac{1}{x}.\ln(\ln x)-0$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2}\ln(\ln x)+\frac{1}{x}.\frac{1/x}{\ln x}=\frac{-\ln(\ln x)}{x^2}+\frac{1}{x^2\ln x}$$

$$f''(e)=\frac{-\ln(\ln(e))}{e^2}+\frac{1}{e^2\ln e}=\frac{0}{e}+\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow d^2y=y''.dx^2\Rightarrow d^2y=\frac{1}{e^2}dx^2$$

مثال: توابع $x = a(t-\sin t)\ ,\ y = a(1-\cos t)$ مفروض هستند دیفرانسیل مرتبه اول تابع f را با فرض $t \neq k\pi$ محاسبه کنید.

حل:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$\Rightarrow\ y'_x = \cot g\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$dy = y'\,dx \Rightarrow dy = ctg\left(\frac{t}{2}\right).dx$$

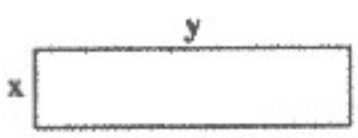
ن) استفاده از مشتق در بحث سرعت تغییرات و کمیتهای وابسته:

به طور کلی مشتق بیانگر سرعت تغییرات است. $\left(\frac{dx}{dt} = V_x\ ,\ \frac{dy}{dt} = V_y\right)$

فرض کنید y,x هر دو تابعی از t باشند، $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و در ضمن $f(x,y) = 0$ باشد اگر از طرفین رابطه $f(x,y) = 0$ با توجه قاعده مشتق گیری زنجیره‌ای نسبت به t مشتق بگیریم رابطه‌ای بین $y(t), x(t)$, y'_t, x'_t پیدا می‌شود که با معلوم بودن شرایط اولیه این میزان ها به هم مرتبط می‌شوند.

مثال: مستطیلی دارای طول 20 متر و عرض 5 متر است اگر طول این مستطیل با سرعت $1\,m/s$ در حال بلند شدن و عرض این مستطیل با سرعت $2\,m/s$ در حال کوتاه شدن باشد مساحت این مستطیل با چه سرعتی تغییر می کند؟

حل:



$$x = 5\ ,\ \frac{dx}{dt} = -2$$

$$y = 20\ ,\ \frac{dy}{dt} = 1$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$s = x.y \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}.y + \frac{dy}{dt}.x = (-2)(20) + (1)(5) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -35\,m/s$$

علامت منفی نشان دهنده آن است که مساحت مستطیل در حال کاهش است.

مثال: استوانه‌ای را در نظر بگیرید که شعاع قاعده آن 1 متر و ارتفاع آن 2 متر است اگر شعاع این استوانه با سرعت $\frac{1}{10}\,m/s$ در حال بزرگ شدن و ارتفاع این استوانه با سرعت $\frac{3}{10}\,m/s$ در حال کوچک شدن باشد، سرعت تغییر حجم این استوانه در شرایط مذکور چیست؟

حل:

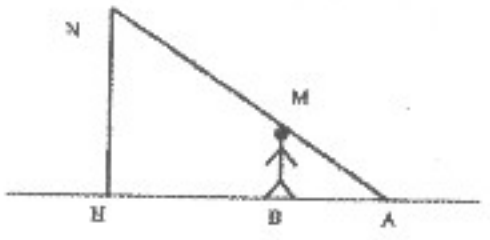
$$r = 1m \ , \frac{dr}{dt} = \frac{1}{10} \ m/s$$
$$h = 2m, \frac{dh}{dt} = \frac{-3}{10} \ m/s$$

حجم استوانه : $v = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \pi\left(2r.\frac{dr}{dt}.h + r^2.\frac{dh}{dt}\right)$

$$\frac{dv}{dt} = \pi\left(2(1)(0.1)(2) + (1)^2(-0.3)\right) = \pi(0.1) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{10} \ m^3/s$$

مثال: اندازه قد مردی 180 سانتیمتر است. اگر این شخص با سرعت 240 سانتیمتر در ثانیه از تیری به ارتفاع 540 سانتیمتر که در بالای آن چراغی نصب شده است دور شود در این صورت سایه این شخص روی زمین با سرعت چند سانتیمتر بر ثانیه از تیر دور خواهد شد؟

حل:



با توجه به شکل ترسیم شده، مشخص است که نوک سایه در نقطه A واقع شده است، لذا با توجه به سرعت حرکت مرد می‌توان گفت $\frac{d(BH)}{dt} = 240$ سانتیمتر بر ثانیه و سرعت سایه عبارت است از $\frac{d(AH)}{dt}$ بنابراین با توجه به تشابه دو مثلث ANH, AMB می‌توان نوشت:

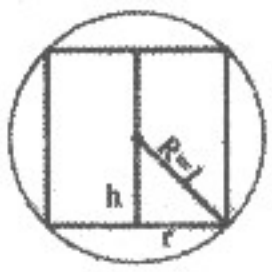
$$\frac{MB}{HN} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{180}{540} = \frac{AH - BH}{AH} \Rightarrow 3(AH - BH) = AM \Rightarrow 2AH = 3BH \Rightarrow 2\frac{d(AH)}{dt} = 3\frac{d(BH)}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d(AH)}{dt} = \frac{3}{2}(240) = 360 \ cm/s$$

هـ) استفاده از مشتق در مسائل بهینه سازی:

برخی مواقع می‌خواهیم یک کمیت را که به دو متغیر (رابطه‌ای بین آنها برقرار است) وابسته می‌باشد را اکسترمم کنیم در این صورت کافی است ابتدا رابطه آن کمیت با دو متغیر مذکور را نوشته و همچنین رابطه بین خود دو متغیر را نیز مشخص می‌کنیم سپس کمیت مورد نظر را بر حسب تنها یک متغیر بازنویسی کرده و با استفاده از مشتق به اکسترمم کردن آن می‌پردازیم .

مثال: کره‌ای به شعاع واحد مفروض است می‌خواهیم در داخل آن استوانه‌ای با حجم ماکزیمم محاط کنیم ارتفاع استوانه را بدست آورید.

حل:



ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

شعاع کره : R ، ارتفاع استوانه : 2h ، شعاع استوانه : r

حجم استوانه $v = \pi r^2 (2h)$

$$h^2 + r^2 = \pi \Rightarrow h^2 + r^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$$

$$v = \pi(1-h^2)(2h)$$

$$v = 2\pi h - 2\pi h^3$$

$$v'_h = 2\pi - 6\pi h^2 = 0 \Rightarrow h = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ غیر قابل قبول

ارتفاع استوانه: $2h = \frac{2}{\sqrt{3}}$

مثال: می‌خواهیم از میله‌ای به طول 1 متر یک دایره و یک مربع بسازیم چه قسمتی از میله را برای مربع و چه قسمتی را برای دایره انتخاب کنیم تا:

الف) مجموع دو مساحت حاصله ماکزیمم باشد.

ب) مجموع دو مساحت حاصله مینیمم شود.

حل:

πr^2 = مساحت دایره $2\pi r = x$ = محیط دایره

a^2 = مساحت مربع $4a = 1 - x$ = محیط مربع

مجموع مساحتها: $s = \pi r^2 + a^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(1-x)^2}{16}$

$$s'_x = \frac{x}{2\pi} + \frac{2(-1)(1-x)}{16} = \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x + \pi x - \pi}{8\pi} = 0 \Rightarrow (4+\pi)x - \pi = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4+\pi}$$

x	0	$\frac{\pi}{4+\pi}$	1
s′	−	0	+
s	↘		↗

اگر $x = \frac{\pi}{4+\pi}$ انتخاب شود مجموع مساحتها min می‌شود.

اگر $x = 1$ انتخاب شود مجموع مساحتها max می‌شود یعنی باید برای حداکثر شدن مساحتها از همه میله یک دایره بسازیم.

$$\begin{cases} s(0)=\dfrac{1}{16} \\ s(1)=\dfrac{1}{4\pi} \end{cases}$$

مثال: قطاعی از دایره به شعاع R با زاویه مرکزی θ مورد نظر است، با شرط آنکه محیط این قطاع ثابت باشد، حداقل مساحت آن به ازاء کدام مقدار θ اتفاق می‌افتد؟

حل:



محیط قطاع : $P = R + R + R\theta = 2R + R0$

مساحت قطاع : $s = \dfrac{\pi R^2 \theta}{2\pi} = R^2 \dfrac{\theta}{2}$

چون محیط قطاع ثابت است می‌توان نوشت:

$$2R + R\theta = k \Rightarrow R = \frac{k}{2+\theta}$$

$$s = R^2 \frac{\theta}{2} = \left(\frac{k}{2+\theta}\right)^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k^2\theta}{2(2+\theta)^2}$$

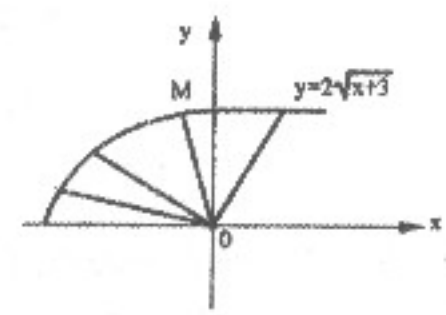
$$s'_\theta = 0 \Rightarrow \frac{k^2}{2}.\frac{(2+\theta)^2 - 2(2+\theta)\theta}{(2+\theta)^4} = 0 \Rightarrow \frac{k^2}{2}.\frac{2+\theta-2\theta}{(2+\theta)^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2+\theta-2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 2 \text{ rad}$$

مثال: کوتاهترین فاصله مبدا مختصات را از سهمی $y = 2\sqrt{x+3}$ پیدا کنید.

حل:

نقطه متحرک $M\left(x, 2\sqrt{x+3}\right)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم این نقطه نماینده همه نقاط واقع بر منحنی است.



$$oM = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{x+3}\right)^2} = \sqrt{x^2+4x+12} \quad , \quad -3 < x < +\infty$$

$$(oM)' = 0 \Rightarrow 2x+4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} oM(-2) = 2\sqrt{2} \\ oM(-3) = 3 \\ oM(\infty) = \infty \end{cases}$$

از مقایسه سه مقدار فوق معلوم می‌شود که می‌نیمم فاصله به منحنی برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد.

« دنباله‌و سری »

دنباله ها

یک دنباله مانند $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد است که با قرار دادن اعداد طبیعی به جای n در جمله عمومی حاصل می‌شود. a_n را جمله عمومی دنباله می‌گوییم.

به مثال زیر توجه کنید:

$$\left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\}: \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \cdots$$

مثال: جمله عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید؟

الف) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \cdots \Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

ب) $1, \frac{-1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{16}, \cdots \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

ج) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \cdots \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{n!}$

تعریف : می‌گوییم دنباله $\{a_n\}$ همگرا به L است هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ باشد و چنانچه $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نباشد، دنباله مذکور را واگرا می‌نامیم.

تعریف : دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی گوییم هرگاه : $a_{n+1} > a_n$ یا $\forall n : a'_n > 0$

دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً نزولی گوییم هرگاه : $a_{n-1} < a_n$ یا $\forall n : a'_n < 0$

تعریف : می‌گوییم m یک کران پایین برای دنباله $\{a_n\}$ است هرگاه برای هر n داشته باشیم: $a_n \geq m$

می‌گوییم M یک کران بالا برای دنباله $\{a_n\}$ است هرگاه برای هر n داشته باشیم: $a_n \leq M$

- اگر دنباله‌ای هم دارای کران بالا و هم دارای کران پایین باشد آن دنباله را کراندار گوییم. و در این صورت داریم: $m \leq a_n \leq M$
- کرانهای یک دنباله را دقیقاً مانند متادیر max و min توابع می‌توان پیدا کرد فقط باید توجه داشته باشید که n یک عدد طبیعی است.

قضیه: هر دنباله همگرا قطعاً کراندار است.

قضیه: هر دنباله کراندار و اکیداً یکنوا قطعاً همگرا است.

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\left\{\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^4+1}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5/5}{n^4+1} = \infty$$

دنباله فوق واگرا است.

ب) $\left\{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (3)^0 = 1$$

دنباله همگرا به عدد ۱ است.

ج) $\left\{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1^\infty$ ابهام دارد

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{-1}{2}}{n+1}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}}$$

پس دنباله همگرا به عدد $\frac{1}{\sqrt{e}}$ است.

د) $\left\{(2n+1)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$

حل:

$$n\to\infty \Rightarrow \frac{\pi}{n}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1).\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

پس دنباله مذکور به عدد 2π همگرا است.

م) $\left\{\frac{\lfloor 2n^2+3\rfloor}{1+2+\cdots+n}\right\}$

حل:

$$n \to \infty \quad \lfloor 2n^2+3 \rfloor \sim 2n^2+3$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{1+2+3+\cdots+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n(n+1)/2} = 4$$

دنباله مذکور به عدد 4 همگرا است.

ن) $\left\{(-1)^n\left(\frac{2n+3}{n+7}\right)\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n\left(\frac{2n+3}{n+7}\right) = \begin{cases} 2 & , \ n \text{ زوج} \\ -2 & , \ n \text{ فرد} \end{cases}$$

پس دنباله فوق واگرا است چون به عدد مشخصی میل نمی‌کند.

و) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{-1 \text{ یا } +1}{\infty} = 0$$

دنباله مورد نظر همگرا به صفر است.

هـ) $\left\{3\mathrm{Ln}(n+1) - \mathrm{Ln}\left(en^3+2\right)\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty - \infty$ مبهم است

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3\mathrm{Ln}(n+1) - \mathrm{Ln}\left(en^3+2\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Ln}(n+1)^3 - \mathrm{Ln}\left(en^3+2\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Ln}\left(\frac{(n+1)^3}{\left(en^3+2\right)}\right)\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

پس دنباله مذکور همگرا به عدد 1- است.

مثال: وضعیت همگرایی و یکنوایی دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{1}{n}\right) = \infty - 0 = \infty$ دنباله واگرا است

$a'_n = 1 - \frac{1}{n^2} \geq 0$ پس دنباله صعودی است

ب) $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1$ دنباله همگرا به عدد 1 است

$a'_n = -\left(\frac{-\pi}{n^2}\right)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\text{همواره مثبت است}} > 0$ دنباله اکیداً صعودی است

ج) $\left\{\cos\frac{n}{\pi}\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{n}{\pi} = \cos(\infty) =$ موجود نمی‌باشد

دنباله فوق واگرا است.

$a'_n = \frac{-1}{\pi}\sin\left(\frac{n}{\pi}\right)$

a'_n علامت یکسانی ندارد پس دنباله مذکور یکنوا نمی‌باشد.

د) $\left\{(-1)^n + \frac{n+1}{n}\right\}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 2 & , n \text{ زوج} \\ 0 & , n \text{ فرد} \end{cases}$ پس دنباله واگرا است.

چند جمله از دنباله را می‌نویسیم:

$(-1+2), \left(1+\frac{3}{2}\right), \left(-1+\frac{3+1}{3}\right), \cdots$

$1, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$

دنباله طبیعت یکنوایی ندارد.

م) $\left\{n+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{n+\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \infty + \frac{-1\text{ یا }+1}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

پس دنباله فوق واگرا است.

چند جمله از دنباله را می‌نویسیم:

$$\left(1+\frac{-1}{1}\right), \left(2+\frac{1}{2}\right), \left(3+\frac{-1}{3}\right), \left(4+\frac{1}{4}\right), \cdots$$

دنباله مذکور صعودی است.

$$0, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, \cdots$$

ن) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} \xrightarrow{\text{مقایسه مرتبه بی‌نهایت}} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$ دنباله همگرا به عدد صفر است

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}.(n!)} = \frac{(n+1).n!.n^n}{(n+1)^n.(n+1).n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

پس دنباله فوق نزولی است.

و) $\left\{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right\}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) = \infty - \infty$$ ابهام دارد.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$$ دنباله همگرا به عدد صفر است.

$$a_n' = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 0$$

دنباله مذکور همواره صعودی است.

هـ) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

حل:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \cdots + \frac{1}{\infty} = 0$ دنباله همگرا به عدد صفر است.

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$

$$2n+2 > n \Rightarrow \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

پس دنباله مذکور نزولی می‌باشد.

مثال: دنباله $\left\{\frac{n}{n^2+30}\right\}$ مفروض است.

اولاً) مشخص کنید این دنباله از جمله چندم به بعد نزولی می‌شود.

ثانیاً) یک کران بالا و یک کران پایین برای این دنباله پیدا کند.

حل:

الف) $a_n = \frac{n}{n^2+30} \Rightarrow a'_n = \frac{(n^2+30)-(2n)(n)}{(n^2+30)^2} = \frac{30-n^2}{(n^2+30)^2}$

$a'_n = 0 \Rightarrow 30 - n^2 = 0 \Rightarrow n = \sqrt{30} : n \in N$ چون

n	1	$\sqrt{30}$	$+\infty$
a'_n	+	0	−
a_n	↗		↘

اما در بحث دنباله مجموعه اعداد طبیعی مد نظر ما است پس $5 < \sqrt{30} < 6$ است و حال می‌توان گفت که از جمله ششم به بعد دنباله نزولی است.

ب) کران پایین : $\begin{cases} a_t = \frac{1}{31} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ کران پایین $= 0$

کران بالا: $5 < \sqrt{30} < 6 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = \frac{5}{55} = \frac{1}{11} \\ a_6 = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow$ کران بالا $= \frac{1}{11}$

مثال : اولاً) دنباله $\{n^2 - 10n + 16\}$ چند جمله منفی دارد؟

ثانیاً) کوچکترین جمله دنباله $\{n^2-20n+200\}$ را بیابید؟

حل:

الف) $a_n = n^2-10n+16=(n-8)(n-2)$

برای اینکه دنباله مذکور جمله منفی داشته باشد باید :

$(n-8)(n-2)<0 \Rightarrow 2<n<8 \Rightarrow n=3,4,5,6,7$

پس دنباله مورد نظر دارای پنج جمله منفی است.

ب) $a_n = n^2-20+200=(n-10)^2+100 \Rightarrow \min(a_n)=100$

مثال: در دنباله $\left\{\frac{4n+1}{2n-5}\right\}$ برای چه مقادیر n داریم: $1.99<\frac{4n+1}{2n-5}<2.01$

حل:

$$1.99<\frac{4n+1}{2n-5}<2.01 \Rightarrow 1.99-2<\frac{4n+1}{2n-5}-2<2.01-2 \Rightarrow -0.01<\frac{4n+1-4n+10}{2n-5}<0.01$$

$$\Rightarrow \left|\frac{11}{2n-5}\right|<0.01 \Rightarrow \frac{11}{2n-5}<\frac{1}{100} \Rightarrow 2n-5>1100 \Rightarrow n>552.5 \Rightarrow n\geq 553$$

دو دنباله خاص

۱- دنباله تصاعد حسابی:

یک تصاعد حسابی رشته‌ای از اعداد است که هر جمله آن از طریق جمع یک عدد ثابت با جمله قبلی حاصل می‌شود که آن عدد ثابت را قدرت نسبت تصاعد حسابی می‌نامیم.

$t_1, (t_1+d), (t_1+2d), (t_1+3d), \cdots$

جمله n ام: $t_n = t_1+(n-1)d$

مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{n(t_1+t_n)}{2}=\frac{n}{2}[2t_1+(n-1)d]$

۲- دنباله تصاعد هندسی:

یک تصاعد هندسی رشته‌ای از اعداد است که هر جمله آن از طریق ضرب یک عدد ثابت در جمله قبلی بدست می‌آید که آن عدد ثابت را قدر نسبت تصاعد هندسی می‌نامیم.

$t_1, t_1q, t_1q^2, t_1q^3, \cdots$

جمله n ام: $t_n = t_1q^{n-1}$

مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$

- اگر $|q|<1$ باشد مجموع بی‌نهایت جمله تصاعد هندسی دارای حد مشخصی است که به آن حد مجموع می گویند:

$S_\infty = \frac{t_1}{1-q}$

مثال: در یک تصاعد عددی جمله اول دو برابر جمله دهم است، جمله نوزدهم این تصاعد را بیابید.

حل:

$$2t_{10} = t_1 \Rightarrow 2(t_1 + 9d) = t_1 \Rightarrow 2t_1 + 18d = t_1 \Rightarrow t_1 = -18d$$

پس داریم $t_{19} = t_1 + (18)d \Rightarrow t_{19} = t_1 - t_1 = 0$

مثال: حاصل حد زیر را بیابید.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$$

حل:

صورت و مخرج کسر حد مجموع جملات دوتصاعد هندسی می‌باشند و داریم:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} : \begin{cases} t_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} : \begin{cases} t_1 = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

مثال: می‌خواهیم بین دو عدد (192,3) 5 عدد قرار دهیم که حاصل 7 عدد مذکور تشکیل تصاعد هندسی دهد، قدر نسبت این تصاعد هندسی را پیدا کنید.

حل:

$$t_1 = 3 \, , \, t_7 = 192$$

$$t_7 = t_1 q^6 \Rightarrow 192 = 3q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm 2$$

مثال: اگر $0.\overline{7a} = \frac{b}{11}$ ، a و b را بیابید.

حل:

$$0.\overline{7a} = 0.7a7a7a\cdots$$

پس داریم:

$$0.7a + 0.007a + 0.00007a + \cdots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0.\overline{7a} \\ q = 0.01 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{b}{11} = \frac{0.\overline{7a}}{1-0.01} = \frac{\frac{\overline{7a}}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{\overline{7a}}{99} \Rightarrow \frac{\overline{7a}}{99} = \frac{b}{11} \Rightarrow \overline{7a} = 9b$$

یعنی عدد 9 باید در b ضرب شود تا هفتاد و خورده‌ای شود پس داریم: $a = 2 \ , \ b = 8$

سری‌های نا متناهی

یک سری نا متناهی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

مطابق تعریف می گوییم این سری نا متناهی همگراست، هرگاه حد مجموع این بی‌نهایت جمله به سمت عدد مشخص و محدود نزدیک شود و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامیم.

قضیه : شرط لازم (نه کافی) برای اینکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال: کدامیک از سریهای زیر شرط لازم برای همگرایی را دارد؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

پس سری مذکور شرط لازم جهت همگرایی را ندارد و واگرا می‌باشد.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n \sin\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n \times \frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

سری فوق نیز شرط لازم برای همگرایی را ندارد پس می توان گفت واگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

سری فوق شرط لازم جهت همگرایی را دارد ولی قطعاً نمی‌توان گفت که آیا همگرا است یا واگرا، برای بررسی وضعیت همگرایی آن باید حد مجموع سری را بدست آورد، اگر به سمت عددی مشخص میل کرد، آنگاه همگراست و در غیر این صورت واگراست.

مثال: می‌دانیم که حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n - 1)$ برابر عدد 4 شده است، حاصل حد $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+1}{a_n+2}$ را پیدا کنید.

حل:

چون سری داده شده به عدد 4 همگراست پس شرط لازم جهت همگرایی را دارد:

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+1}{a_n+2} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

آزمونهایی جهت تعیین همگرایی یا واگرایی سری با جملات مثبت.

الف) آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ را در نظر بگیرید که در آن P_n و Q_n دو چند جمله‌ای از n می‌باشند. (یا دو عبارت رادیکالی) می‌توان ثابت کرد.

اگر

(درجه Q_n) > (درجه P_n) +1 آنگاه سری مورد نظر همگراست ودر غیر این صورت آن سری واگراست.

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+3}{n^4+6n+1} \xrightarrow{4>2+1}$ همگراست

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3} \xrightarrow{3>1+\frac{1}{2}}$ همگراست

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4n+1} \xrightarrow{2\not>2+1}$ واگراست

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+6n+1}}{n^2+5n+3} \xrightarrow{2>\frac{2}{3}+1}$ همگراست

م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7n+6}{\sqrt{n^8+7n^3+19}} \xrightarrow{\frac{8}{2}>2+1}$ همگراست

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+1} \xrightarrow{1\not>0+1}$ واگراست

نکته:

۱- مجموع دو سری همگرا یک سری همگراست

۲- مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا یک سری واگرا است.

۳- مجموع دو سری واگرا می‌تواند یک سری همگرا یا یک سری واگرا باشد.

نکته: سریهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^P} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(Ln(n))^P}$$

ثابت می‌شود همگی سریهای فوق به ازای $P>1$ همگرا می‌باشند و به ازای $P\le 1$ واگرایند.

نکته: فرض کنید داشته باشیم: $a_n \le b_n$

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{Ln(n)}{n^2}+\frac{1}{3^n}\right)$

حل:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{Ln(n)}{n^2}+\frac{1}{3^n}\right)=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^2}}_{\text{همگرا}}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}}_{\text{همگرا}}$$

در کل سری فوق همگراست.

ب) $\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{nLn(n)}\right)$

حل:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{nLn(n)}\right)=\underbrace{\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{5^n}}_{\text{همگرا}}+\underbrace{\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{nLn(n)}}_{\text{واگرا}}$$

پس سری فوق واگرا می‌باشد.

ج) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$

حل:

می‌دانیم که $\forall n \geq 2 : n^{n+1} > 2 \Rightarrow \frac{1}{n^{n+1}} < \frac{1}{2}$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگراست پس درنتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n+1}}$ نیز همگرا خواهد بود.

مثال: در سری های زیر مقادیر P را طوری تعیین کنید تا حاصل سری همگرا باشد.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3p+2}$

حل: می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{3p+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-(3p+2)}}$$

شرط همگرایی می‌طلبد که:

$$-(3p+2) > 1 \Rightarrow 3p+2 < -1 \Rightarrow 3p < -3 \Rightarrow p < -1$$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(2p+7)^n$

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2p+7)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2p+7}\right)^n}$$

شرط همگرایی می‌طلبد که:

$$\frac{1}{2p+7} > 1 \Rightarrow \frac{1}{2p+7} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-2p-6}{2p+7} > 0$$

P		$-\frac{7}{2}$		-3	
$-2p-6$		+		0	−
$2p+7$	−	0	+		
$\frac{-2p-6}{2p+7}$	−	∞	+	0	−

$\Rightarrow$ پس $\frac{-7}{2} < P < -3$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^{4-3p}}$

حل:

$$4-3p > 1 \Rightarrow 3p < 3 \Rightarrow p < 1$$

ب) آزمون دالامبر (آزمون نسبت) :

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید چنانچه فرض کنیم $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ باشد می‌توان نشان داد:

۱- اگر $L>1$ باشد سری مورد نظر واگرا است.

۲- اگر $L<1$ باشد سری مورد نظر همگرا است.

۳- اگر $L=1$ باشد این آزمون بی نتیجه است.

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{(n^2+1)}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n^2+2n+2)}{2^{n+1}(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}<1$$

پس سری مورد نظر همگراست.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n!)}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

پس سری فوق نیز همگرا می‌باشد.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)(n!)}{(n+1)^n.(n+1)(n!)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=1^{\infty}$$

ابهام دارد.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<0$$

پس سری فوق نیز همگرا می‌باشد.

ج) آزمون کوشی (آزمون ریشه):

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید چنانچه فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ می‌توان نشان داد:

۱- اگر $L>1$ سری مورد نظر واگرا است.

۲- اگر $L<1$ سری مورد نظر همگرا است.

۳- اگر $L=1$ این آزمون بی نتیجه است.

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{1} = 2 > 1$$

پس سری مورد نظر واگرا است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$$

پس سری فوق واگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{4n+1}\right)^{n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{4n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

پس سری مذکور همگرا است.

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{4^n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\frac{(3-4i)^n}{4^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|3-4i|}{4} = \frac{5}{4} > 1$$

پس سری مذکور واگرا می‌باشد.

سری های متناوب

یک سری متناوب بصورتهای زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

یا ($a_n > 0$ با فرض)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

مطابق قضیه لایب نیتس سری متناوب فوق همگرا است اگر دو شرط زیر تواماً برقرار باشد:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \forall n \in N,\ a_{n+1} < a_n \qquad a_n' < 0 \end{cases}$$ (لااقل از یک n خاص به بعد)

نکته: فرض کنید a_n همواره مثبت باشد چنانچه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد می‌توان ثابت کرد که سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ نیز همگرا است و اصطلاحاً می‌گوییم این سری متناوب همگرایی مطلق دارد. همچنین اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد ولی بتوانیم نشان دهیم که سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست آنگاه اصطلاحاً می‌گوییم سری متناوب مورد نظر همگرایی مشروط دارد .

مثال: وضعیت سریهای زیر را از حیث همگرایی مطلق یا همگرایی مشروط یا واگرایی بررسی کنید.

الف) $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+6n+1}$

حل:

می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+6n+1}$ همگراست (برطبق آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج) پس سری I نیز قطعاً همگراست و همگرایی مطلق است.

ب) $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

حل:

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست پس سری I قطعاً همگرایی مطلق ندارد.

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ a_n' = \frac{-1}{2n\sqrt{n}} < 0 \end{cases}$$ پس دنباله a_n نزولی است.

طبق قضیه لایب نیتس می‌توان گفت که سری I همگرایی مشروط دارد.

ج) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

حل:

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ واگرا است پس سری I قطعاً همگرایی مطلق ندارد.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

پس سری I واگراست.

د) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,Ln(n)}{n}$

حل:

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n}$ واگراست پس می‌توان گفت سری I قطعاً همگرایی مطلق ندارد.

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n)}{n}=0\\ a_n'=\frac{1-Ln(n)}{n^2}<0 \quad (\forall n\geq 3)\end{cases}$$

پس سری متناوب I همگرایی مشروط دارد.

م) $I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$

حل:

می‌دانیم $n\to\infty \Rightarrow \tan\frac{1}{n\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n\sqrt{n}}$ ، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$ تقریباً هم ارز با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ بوده و سری مورد نظر همگراست پس سری I همگرایی مطلق دارد.

روشهایی برای محاسبه برخی سریها

الف) چنانچه سری مورد نظر مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $|q|<1$ باشد حاصل سری همان $S_\infty=\frac{t_1}{1-q}$ خواهد بود.

ب) مطابق قاعده ادغام داریم:

$$\sum_{n=q}^{q}(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}\Big|_{n=q}-a_n\Big|_{n=p}$$

مثال: حاصل سریهای زیر را پیدا کنید.

الف) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

حل:

$$I=\frac{1}{3}+\frac{-1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{-1}{81}+\cdots \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{1}{3} \\ q=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$S_\infty=\frac{t_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

ب) $I=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sqrt[n+1]{8}-\sqrt[n]{8}\right)$

حل:

$$I=\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}\Big|_{n=\infty}-a_n\Big|_{n=3}=\sqrt[n+1]{8}\Big|_{n=\infty}-\sqrt[n]{8}\Big|_{n=3}=\sqrt[\infty]{8}-\sqrt[3]{8}=1-2=-1$$

ج) $I=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

حل:

$$I=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\Big|_{n=6}-\frac{1}{n+1}\Big|_{n=\infty}=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$$

د) $I=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

حل:

$$I=\sqrt{2+I}\Rightarrow I^2=2+I \Rightarrow I^2-I-2=0 \Rightarrow (I-2)(I+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} I=2 & \text{ق.ق} \\ I=-1 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

م) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+5^n}{10^{n+1}}$

حل:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{10^{n+1}}+\frac{5^n}{10^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{10^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10^{n+1}}$$

$$I=\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots\right)+\left(\frac{5}{100}+\frac{25}{1000}+\frac{125}{10000}+\cdots\right)=\left(\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{2}{10}}\right)+\left(\frac{\frac{5}{100}}{1-\frac{5}{10}}\right)=\frac{1}{80}+\frac{1}{10}=\frac{9}{80}$$

ن) $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$

حل:

$$\frac{1}{(n-1)!(n+1)}=\frac{n}{(n-1)!(n+1)n}=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{n!}\Big|_{n=1}-\frac{1}{(n+1)!}\Big|_{n=\infty}=1-0=1$$

و) $I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$

حل:

$$\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{n\left(n^2-1\right)}=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{\frac{1}{2}\left((n+1)-(n-1)\right)}{n(n-1)(n+1)}$$

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(n+1)-(n-1)}{n(n-1)(n+1)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}\Big|_{n=2}-\frac{1}{n(n+1)}\Big|_{n=\infty}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

هـ) $I=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$

حل:

$$\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}=\log\left(k(k+2)\right)-\log(k+1)^2$$

$$=\log(k)+\log(k+2)-\left(2\log(k+1)\right)=\log(k)+\log(k+2)-\log(k+1)-\log(k+1)$$

$$=\left[\log(k)-\log(k+1)\right]-\left[\log(k+1)-\log(k+2)\right]=\log\left(\frac{k}{k+1}\right)-\log\left(\frac{k+1}{k+2}\right)$$

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\log\left(\frac{k}{k+1}\right)-\log\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right]=\log\left(\frac{k}{k+1}\right)\Big|_{k=1}-\log\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\Big|_{k=\infty}=\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log 1=\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال: مقدار x را طوری تعیین کنید تا سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-2}}{x^{n+2}}$ همگرا باشد.

حل:

می‌دانیم سری هندسی زمانی همگراست که داشته باشیم : $|q|<1$

$$I=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}+\cdots \Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{1}{5x^3} \\ q=\dfrac{5}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{5}{x}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{5}{x}<1 \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x<-5 \end{cases}$$

سریهای تابع:

یک سری تابع بصورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_{(n,x)}$ تعریف می‌شود. مشخص است که با بسط Σ مذکور مجموعی حاصل می‌شود که هر کدام از جملات آن تابعی از x است. در ارتباط با این نوع سریها بحث فاصله همگرایی مطرح می‌شود، یعنی می‌خواهیم بدانیم این سری به ازای چه مقادیری از x همگراست. برای این منظور کافی است نا معادله زیر را حل کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{(n+1,x)}}{a_{(n,x)}}\right|<1$$

توجه داشته باشید محدوده‌ای که برای x بدست می‌آید را اصطلاحاً فاصله همگرایی سری مورد نظر می‌گوییم و مطابق تعریف نصف طول فاصله همگرایی را شعاع همگرایی سری مذکور می‌نامیم.

مثال: فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+7)^n}{n^2+3}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x+7)^{n+1}}{(n+1)^2+3}}{\frac{(2x+7)^n}{n^2+3}}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+3)(2x+7)}{n^2+2n+4}\right|<1 \Rightarrow |2x+7|<1 \Rightarrow -1<2x+7<1 \Rightarrow -4<x<-3$$

شعاع همگرایی برابر است با : $R=\frac{-3-(-4)}{2}=\frac{1}{2}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|<1 \Rightarrow 0<1$$

پس شرط همگرایی به ازای هر x ای بر قرار است: $-\infty < x < \infty$: فاصله همگرایی

$R = \infty$: شعاع همگرایی

ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-x\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

و شعاع همگرایی برابر است با $R = 1$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{(n+1)^2} x^{(n+1)^2}}{3^{n^2} x^{n^2}} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n^2+2n+1} . x^{n^2+2n+1}}{3^{n^2} . x^{n^2}} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| 3^{2n+1} . x^{2n+1} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| (3x)^{2n+1} \right| < 1 \Rightarrow -1 < (3x)^{2n+1} < 1 \Rightarrow -1 < 3x < 1 \Rightarrow \frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

پس شعاع همگرایی عبارت است از: $R = \frac{1}{3}$

م) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \times 2} + \frac{x^3}{2^3 \times 3} + \cdots$

حل:

می‌توان حدث زد که :

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \times 2} + \frac{x^3}{2^3 \times 3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \times 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \times 2^n}} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n.x}{(n+1).2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$$

شعاع همگرایی : $R = 2$

بسط تیلور و بسط مک لوران یک تابع:

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 بصورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

که در آن ضرایب بسط تیلور بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{f(x_0)}{0!}\\ a_1&=\frac{f'(x_0)}{1!}\\ a_2&=\frac{f''(x_0)}{2!}\\ a_3&=\frac{f'''(x_0)}{3!}\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

نکته: مطابق تعریف بسط تیلور یک تابع حول نقطه $x_0=0$ را بسط مک لوران تابع می گوییم.

مثال: در تابع $f(x)=\mathrm{Ln}(3x+2)$ سه جمله اول بسط تیلور آن را حول نقطه $x_0=1$ بنویسید.

حل:

$$f'(x)=\frac{3}{3x+2}\ ,\ f''(x)=\frac{-9}{(3x+2)^2}$$

$$f(x)=\mathrm{Ln}(3x+2)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(2)}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

$$f(x)=\mathrm{Ln}(3x+2)=\mathrm{Ln}5+\frac{3}{5}(x-1)-\frac{9}{50}(x-1)^2+\cdots$$

مثال: تابع $f(x)=x^2+\sin x+2\cos x$ مفروض است در بسط تیلور این تابع ضریب جمله $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$ کدام است؟

حل:

بدیهی است بسط تیلور حول نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ مد نظر بوده لذا داریم:

$$\left.\begin{aligned}f'(x)&=2x+\cos x-2\sin x\\ f''(x)&=2-\sin x-2\cos x\\ f'''(x)&=-\cos x+2\sin x\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad a_3=\frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$$

مثال: تابع $f(x)=e^{2x-\cos x}$ مفروض است سه جمله اول بسط مک لوران آن را بنویسید.

حل:

$$f(x)=e^{2x-\cos x} \Rightarrow f(0)=e^{0-1}=\frac{1}{e}$$

$$f'(x)=(2+\sin x)e^{2x-\cos x} \Rightarrow f'(0)=(2+0)e^{0-1}=\frac{2}{e}$$

$$f''(x)=(\cos x)e^{2x-\cos x}+(2+\sin x)^2 e^{2x-\cos x} \Rightarrow f''(0)=\frac{5}{e}$$

پس سه جمله اول بسط مک لوران تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{1}{e}+\frac{2}{e}x+\frac{5}{2e}x^2+\cdots$$

نکته مهم: بسط مک لوران توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\forall x\in R:\begin{cases} e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\ \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

$$|x|<1:\begin{cases} \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \\ \mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

مثال: تابع $f(x)=(x^4-3x^2)e^x$ مفروض است ضریب x^5 در بسط مک لوران این تابع را پیدا کنید.

حل:

می‌دانیم که ضریب x^5 را می‌توان از فرمول $a_5=\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ محاسبه کرد ولی این کار بسیار دشوار است پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x^4-3x^2)\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$\text{ضریب } x^5=(1)\left(\frac{1}{1!}\right)+(-3)\left(\frac{1}{3!}\right)=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

مثال: ضریب x^7 در بسط مک لوران تابع $f(x)=\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{1+x}$ در فاصله $|x|<1$ را بیابید.

حل:

$$f(x)=\left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\cdots\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\cdots\right)$$

$$f(x)=x-\left(\frac{1}{2}+1\right)x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)x^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)x^4+\cdots$$

پس ضریب x^7 برابر است با : $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)$

مثال: مشتق مرتبه پنجم تابع $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$ در $x=0$ کدام است؟

حل:

می‌دانیم $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ضریب جمله n ام بسط مک لوران تابع می‌باشد پس کافی است ضریب جمله x^5 تابع را بدست آورده در 5! ضرب کنیم آنگاه مشتق پنجم تابع در $x=0$ بدست می‌آید پس داریم :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \Rightarrow e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

$$e^{x^2}-1=\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)=x+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots$$

حال می‌توان گفت که :

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}=\frac{1}{3!}\Rightarrow f^{(5)}(0)=5!\times\frac{1}{3!}=20$$

«انتگرال»

انتگرال نامعین:

هر گاه $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد یعنی $F'(x)=f(x)$ آنگاه:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

در عبارت بالا c ثابت انتگرال گیری است.

انتگرال معین:

هر گاه $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد و تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

توجه: دقت کنید در بحث فوق اگر یک و یا هر دو حد انتگرال گیری یعنی a,b از جنس بی‌نهایت باشند زمانی که می‌خواهیم آنها را در تابع اولیه قرار دهیم مانند یک مسئله حدی رفتار می‌کنیم.

یادآوری از چند قاعده انتگرال‌گیری

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+c$ (با شرط $m\neq -1$)

2) $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+c$ (با شرط $m\neq -1$)

۳) $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax+c$

4) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax+c$

5) $\int \left(1+\tan^2 ax\right)dx = \frac{1}{a}\tan ax+c$

6) $\int \left(1+\mathrm{ctg}^2 ax\right)dx = \frac{-1}{a}\mathrm{ctg}\ ax+c$

7) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{x}{a}\right)+c$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

9) $\int \frac{dx}{x} = \mathrm{Ln}|x|+c$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \mathrm{Ln}|u(x)|+c$

10) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\mathrm{Ln}|\cos x|+c$

11) $\int \mathrm{cotg}\,x\,dx = \ln|\sin x|+c$

12) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left|\frac{x-a}{x+b}\right|+c$

13) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$

14) $\int e^x\,dx=e^x+c$

15) $\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\int\left(1+\cot g^2 x\right)dx=-\cot g+c$

16) $\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\left(1+tg^2 x\right)dx=tgx+c$

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را پیدا کنید.

الف) $I=\int\left(\frac{x^3-\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

حل:

$$I=\int\left(\frac{x^3-x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{-1}{3}}\right)dx=\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}-\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$$

ب) $I=\int\frac{dx}{3-7x}$

حل:

$$I=\int\frac{dx}{3-7x}=\int\left(\frac{-1}{7}\right)\frac{-7dx}{3-7x}=-\frac{1}{7}\ln|3-7x|+c$$

ج) $I=\int\left(x^2+3x+1\right)d\left(x^2+5x\right)$

حل: با توجه به تعریف دیفرانسیل داریم:

$$d\left(x^2+5x\right)=(2x+5)dx$$

$$I=\int\left(x^2+3x+1\right)(2x+5)dx=\int\left(2x^3+6x^2+2x+5x^2+15x+5\right)dx$$

$$I=\frac{2}{4}x^4+\frac{6}{3}x^3+x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+5x+c$$

$$I=\frac{x^4}{2}+2x^3+x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+5x+c=\frac{x^4}{2}+\frac{11}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2+5x+c$$

د) $I=\int\left(x+2-\frac{5x+11}{x^2+4}\right)dx$

حل:

$$I=\int\left(x+2-\frac{5x}{x^2+4}-\frac{11}{x^2+4}\right)dx$$

$$I=\int\left(x+2-\left(\frac{5}{2}\right)\frac{2x}{x^2+4}-\frac{11}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right| - \left(11\times\frac{1}{2}\right)\text{Arc}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right| - \frac{11}{2}\text{Arc}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$I = \int\left(3^x + 4^x\right)dx$$

حل:

$$= \int\left(3^x + 4^x\right)dx = \frac{3^x}{\text{Ln}3} + \frac{4^x}{\text{Ln}4} + c$$

مثال: با فرض آنکه $xy' = x^2 + 1$ بوده و $y(1) = 0$ باشد $y(x)$ را پیدا کنید.

حل:

$$y' = x^2 + 1 \Rightarrow y' = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow y' = x + \frac{1}{x}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم:

$$y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$$

و حال شرط $y(1) = 0$ را اعمال می‌کنیم پس :

$$0 = \frac{1}{2} + \ln 1 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}$$

مثال: چنانچه تابع $f(x)$ از نقطه $(1,2)$ بگذرد و همچنین داشته باشیم $f''(x) = x^3 - x$ و بدانیم که شیب خط مماس در این نقطه $\frac{-1}{4}$ است، در این صورت $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$f''(x) = x^3 - x \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$$

حال می‌دانیم که شیب خط مماس در نقطه $(1,2)$ برابر $\frac{-1}{4}$ است پس داریم:

$$\frac{-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

دوباره انتگرال می گیریم :

$$f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + k$$

می دانیم که تابع f از نقطه $(1,2)$ می گذرد پس :

$$2=\frac{1}{20}-\frac{1}{6}+k \Rightarrow k=\frac{127}{60} \Rightarrow f(x)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{127}{60}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال های معین زیر:

الف) $I=\int_0^{Ln3}\left(e^{2x}+e^{x}\right)dx$

حل:

$$I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}\right]_0^{ln3}=\left(\frac{1}{2}e^{2Ln3}+e^{Ln3}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{0}+e^{0}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=6$$

ب) $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+9}$

حل:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+9}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{dx}{x^2+\frac{9}{4}}=\left[\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{3}{2}}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$I=\left[\frac{1}{6}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{6}\operatorname{Arc\,tan}(+\infty)-\frac{1}{6}\operatorname{Arc\,tan}(0) \Rightarrow \frac{1}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\times 0=\frac{\pi}{12}$$

ج) $I=\int_1^{+\infty}\left(e^{-3x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

حل:

$$I=\int_1^{+\infty}\left(e^{-3x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(e^{-3x}+x^{-2}\right)$$

$$I=\left[\frac{-1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=\left(\frac{-1}{3}e^{-\infty}-\frac{1}{+\infty}\right)-\left(\frac{-1}{3}e^{-3}-1\right)=(0-0)-\left(\frac{-e^{-3}}{3}-1\right)=\frac{e^{-3}}{3}+1=1+\frac{1}{3e^3}$$

د) $I=\int_2^3\frac{dx}{2x+1}$

حل:

$$I=\int_2^3\frac{dx}{2x+1}=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2dx}{2x+1}=\left[\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|2x+1|\right]_2^3=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|7|-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|5|=\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}7-\operatorname{Ln}5)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{7}{5}\right)$$

ه) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx$

حل:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=\left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{-1}{3}\cos\pi+\frac{1}{3}\cos(0)=\frac{-1}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

و) $I=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{7dx}{x.Lnx}$

حل:

$$I=\int_{\sqrt{e}}^{e}7\frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x}=\left[7\ln|\ln x|\right]_{\sqrt{e}}^{e}=7\ln|\ln e|-7\ln\left|\ln\sqrt{e}\right|=7(0)-7\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-7\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

نکته: همواره داریم :

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

نکته: در محاسبه انتگرالهایی به فرم $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که صورت و مخرج دوچند جمله‌ای می‌باشند اگر درجه صورت از مخرج کمتر نباشد نخست $P(x)$ را بر $Q(x)$ تقسیم می‌کنیم سپس کسر مورد نظر را تفکیک می‌کنیم و بعد عمل انتگرال گیری را انجام می‌دهیم .

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int\left(\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+4}\right)dx$

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+x-1 & x^2+4 \\ \hline x^3+4x & x+2 \\ \hline 2x^2-3x-1 & \\ 2x^2+8 & \\ \hline -3x-9 & \end{array}$$

حال می‌توان نوشت:

$$I=\int \frac{(x+2)(x^2+4)+(-3x-9)}{x^2+4}dx=\int \left(x+2-\frac{3x+9}{x^2+4}\right)dx$$

$$I=\int \left(x+2-\frac{3x}{x^2+4}-\frac{9}{x^2+4}\right)dx=\int \left(x+2-\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{x^2+4}-\frac{9}{x^2+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2+4\right|-\frac{9}{2}\text{Arc}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

ب) $I=\int \left(\frac{3x+1}{x-6}\right)dx$

حل:

$$I=\int \left(\frac{3x+1}{x-6}\right)dx=\int (3)\frac{x+\frac{1}{3}}{x-6}dx=\int (3)\frac{x-6+\frac{19}{3}}{x-6}dx=3\int \left(1+\frac{19}{3}\ \frac{1}{x-6}\right)dx=3\left(x+\frac{19}{3}\text{Ln}\left|x-6\right|\right)+c$$

$$I=3x+19\text{Ln}\left|x-6\right|+c$$

ج) $I=\int \left(\frac{x^4+2x^3-x+1}{x^2+4}\right)dx$

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-x+1 & x^2+4 \\ \hline x^4+4x^2 & x^2+2x-4 \\ \hline 2x^3-4x^2-x+1 & \\ 2x^3+8x & \\ \hline -4x^2-9x+1 & \\ -4x-16 & \\ \hline -9x+17 & \end{array}$$

پس داریم:

$$I=\int \left(\frac{(x^2+2x-4)(x^2+4)+(-9x+17)}{x^2+4}\right)dx=\int \left((x^2+2x-4)+\frac{-9x+17}{x^2+4}\right)dx$$

$$I=\int \left((x^2+2x-4)-\frac{9x}{x^2+4}+\frac{17}{x^2+4}\right)dx=\int \left((x^2+2x-4)-\left(\frac{9}{2}\right)\frac{2x}{x^2+4}+\frac{17}{x^2+4}\right)dx$$

$$I=\frac{x^3}{3}+x^2-4x-\frac{9}{2}\text{Ln}\left|x^2+4\right|+\frac{17}{2}\text{Arc}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

نکته: در محاسبه انتگرالهایی به فرم $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که $Q(x)$ یک عبارت درجه دو غیر قابل تجزیه است و $P(x)$ یک عبارت درجه اول (یا یک عدد ثابت) می‌باشد مناسب است نخست از مخرج یک مربع کامل بسازیم سپس انتگرال را محاسبه کنیم .

مثال: حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

الف) $I=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

حل:

عبارت مخرج کسر یک چند جمله‌ای درجه دو با دلتای منفی $(\Delta<0)$ است پس می‌توان نوشت:

$$I=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+1+4}=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$I=\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}(1)-\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}(-\infty)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{8}$$

ب) $I=\int\frac{x+7}{x^2-x+3}dx$

حل: عبارت مخرج کسر فوق یک چند جمله‌ای درجه دو با دلتای منفی $(\Delta<0)$ است پس داریم:

$$I=\int\frac{x+7}{x^2-x+3}dx=\int\frac{x+7}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4}}dx=\int\frac{x+7}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx$$

$$I=\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx=\int\frac{\frac{15}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx+\int\frac{\frac{15}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\frac{\frac{15}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right)+c=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\frac{15}{\sqrt{11}}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)+c$$

انتگرالگیری معین از توابع زوج یا فرد در یک فاصله متقارن

اگر $f(x)$ در فاصله $[-a,a]$ پیوسته باشد می‌توان نشان داد:

الف) اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد داریم: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

ب) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد داریم: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_{-3}^{3}\left(x^2+\cos x\right)\operatorname{Ln}\left(\frac{4-x}{4+x}\right)dx$ را محاسبه کنید:

حل:

می‌دانیم که تابع $x^2+\cos x$ تابع زوج است و تابع $\operatorname{Ln}\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$ تابعی فرد است . پس کل تابع زیر علامت انتگرال فرد بوده و داریم:

$$I=0$$

مثال: مقدار ثابت a چه مقادیر می‌تواند باشد تا حاصل انتگرال زیر برابر صفر شود؟

$$I=\int_{1-a}^{3+4a}\mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\frac{\cos x}{x^4+1}dx$$

حل: زمانی که حد بالا و حد پایین انتگرال با هم برابر باشد حاصل آن انتگرال برابر صفر می‌شود پس داریم :

$$3+4a=1-a\Rightarrow 5a=-2\Rightarrow a=\frac{-2}{5}$$

از طرفی می‌دانیم که تابع $\frac{\cos x}{x^4+1}$ تابع زوج است و تابع $\mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ تابعی فرد می‌باشد پس کل تابع زیر انتگرال تابعی فرد بوده، این انتگرال زمانی حاصلی برابر با صفر خواهد داشت که دارای حدود بالا و پایین متقارن باشد.

$$3+4a=-(1-a)\Rightarrow 3+4a=-1+a\Rightarrow 3a=-4\Rightarrow a=\frac{-4}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{x^2+16}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ را بدست آورید.

حل:

هر دو تابع $\frac{1}{\cos^2 x}$ و $\frac{1}{x^2+16}$ زوج می‌باشند پس تابع زیر انتگرال زوج است و داریم:

$$I=\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{x^2+16}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=2\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{x^2+16}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$I=2\left[\frac{1}{4}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{x}{4}\right)+\tan x\right]_0^4=2\left(\frac{1}{4}\mathrm{Arc}\tan 1+\tan 4-\frac{1}{4}\mathrm{Arc}\tan 0-\tan 0\right)=2\left(\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4}+\tan 4-0-0\right)=\frac{\pi}{8}+2\tan 4$$

انتگرالگیری بصورت معین از توابعی که در فاصله انتگرالگیری طبیعت منحصر به فردی ندارند.

روال کلی در محاسبه این نوع انتگرالهاآن است که نخست به طریقی مناسب فاصله انتگرالگیری را به فواصل کوتاهتر به گونه‌ای بشکنیم که بتوانیم در هر کدام از آن فواصل تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را معلوم کنیم سپس حل مساله را ادامه دهیم.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر :

الف) $I=\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{|x|}{x}\right)dx$

حل:

$$|x|=\begin{cases}x & ,\ x\geq 0\\ -x & ,\ x<0\end{cases}$$

$$I=\int_{-3}^{0}\left(1+\frac{-x}{x}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1+\frac{x}{x}\right)dx=\int_{-3}^{0}0dx+\int_{0}^{1}2dx=[2x]_0^1=2-0=2$$

ب) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\lfloor x\rfloor\cos x\,dx$

حل:

$0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$

$$I = \int_0^1 (0)\cos x\, dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1)\cos x\, dx = 0 + \left[\sin x\right]_1^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 1 = 1 - \sin 1$$

ج) $I = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \qquad , \qquad f(x) = \max\left\{1, x^2\right\}$

حل:

$$I = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{-8}{3}\right) + \frac{1}{2} - (-1) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} = \frac{23}{6}$$

د) $I = \int_{-2}^{1} \left|x - \left|3x\right|\right| dx$

حل:

$$I = \int_{-2}^{0} \left|x + 3x\right| dx + \int_{0}^{1} \left|x - 3x\right| dx = \int_{-2}^{0} \left|4x\right| dx + \int_{0}^{1} \left|-2x\right| dx = \int_{-2}^{0} -4x\, dx + \int_{0}^{1} 2x\, dx$$

$$I = \left[-2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_{0}^{1} = 0 + 2(-2)^2 + (1)^2 - 0 = 9$$

م) $I = \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}\left(x^2 - 2x\right) dx$

حل:

$$\operatorname{sgn} A = \begin{cases} -1 & , A < 0 \\ 0 & , A = 0 \\ +1 & , A > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

x		0		2	
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$I = \int_{-1}^{0} (1)dx + \int_{0}^{2} (-1)dx = \left[x\right]_{-1}^{0} + \left[-x\right]_{0}^{2} = 0 + 1 + (-2) - 0 = -1$$

ن) $I = \int_0^2 \left(\left\lfloor x^2 \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor\right) dx$

حل:

$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 0$$
$$1 < x < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 1 < x^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 1$$
$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 2 < x^2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 2$$
$$\sqrt{3} < x < 2 \quad \Rightarrow \quad 3 < x^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 3$$
$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor = 0$$
$$1 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{x} < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor = 1$$

$$I=\int_0^1(0+0)dx+\int_1^{\sqrt{2}}(1+1)dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(2+1)dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}(3+1)dx=0+\Big[2x\Big]_1^{\sqrt{2}}+\Big[3x\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+\Big[4x\Big]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$I=\left(2\sqrt{2}-2\right)+\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+8-4\sqrt{3}=6-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

و) $I=\int_0^4 t^2u_3(t)dt$

حل:

$$u_a(t)=\begin{cases}1 & t\ge a\\ 0 & t<a\end{cases}\quad\Rightarrow\quad u_3(t)=\begin{cases}1 & t\ge 3\\ 0 & t<3\end{cases}$$

$$I=\int_0^3 t^2(0)dt+\int_3^4 t^2(1)dt=0+\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^4=\frac{64}{3}-\frac{27}{3}=\frac{37}{3}$$

هـ) $I=\int_{-1}^{1}\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor dx$

حل:

$$-1\le x<\frac{-1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{-1}{2}\le x+\frac{1}{2}<0\quad\Rightarrow\quad\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=-1$$

$$\frac{-1}{2}\le x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le x+\frac{1}{2}<1\Rightarrow\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=0$$

$$\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow 1\le x+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=1$$

$$I=\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}-1dx+\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}0dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}1dx=\Big[-x\Big]_{-1}^{\frac{-1}{2}}+0+\Big[x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$I=\left(\frac{1}{2}-1\right)+0+\left(1-\frac{1}{2}\right)=0$$

تکنیکهای انتگرالگیری :

الف) روش تغییر متغیر (جانشینی) : اساس انتگرالگیری به روش تغییر متغیر آن است که با انتخاب یک متغیر جدید مناسب مانند u که خود تابعی از x می‌باشد تابع زیر علامت انتگرال را برحسب این متغیر بازنویسی کرده و پس از حل آن جواب نهایی را مجدداً برحسب x بیان کنیم.

دقت کنید اگر انتگرال مورد نظر معین باشد هم می‌توان پس از اعمال روش تغییر متغیر و محاسبه انتگرال بصورت نامعین در نهایت حدود انتگال مورد نظر را در تابع اولیه یافت شده قرار داد و جواب را بدست آورد و هم می‌توان پس از معرفی متغیر جدید با توجه به حدود متغیر اولیه، حدود این متغیر جدید را مشخص کرده و به محاسبه انتگرال معین بر حسب این متغیر جدید پرداخت .

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int\left(3x^2+4\right)\left(x^3+4x\right)^{17}dx$

حل:

$$x^3+4x=u \Rightarrow (3x^2-4)dx=du$$

$$I=\int u^{17}du=\frac{u^{18}}{18}+c \Rightarrow I=\frac{(x^3+4x)^{18}}{18}+c$$

ب) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt[4]{1+\cos x}}dx$

حل:

$$1+\cos x=u \Rightarrow -\sin x dx=du$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=2 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$I=\int_2^1\frac{-du}{\sqrt[4]{u}}=\int_1^2 u^{\frac{-1}{4}}du=\left[\frac{1}{3/4}u^{\frac{3}{4}}\right]_1^2=\left[\frac{4}{3}\sqrt[4]{u^3}\right]_1^2=\frac{4}{3}\sqrt[4]{8}-\frac{4}{3}(1)=\frac{4}{3}(\sqrt[4]{8}-1)$$

ج) $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{2^x+2^{-x}}$

حل:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{2^x+2^{-x}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{2^x+\frac{1}{2^x}}=\int_0^{\infty}\frac{2^x dx}{2^{2x}+1}=\int_0^{\infty}\frac{2^x dx}{(2^x)^2+1}$$

$$2^x=u \Rightarrow (2^x.Ln2)dx=du \Rightarrow 2^x dx=\frac{du}{Ln2}$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow u=1 \\ x=\infty \rightarrow u=\infty \end{cases}$$

$$I=\int_1^{\infty}\frac{du}{Ln(2)(u^2+1)}=\frac{1}{Ln2}\left[\operatorname{Arc}\tan u\right]_1^{\infty}=\frac{1}{Ln2}(\operatorname{Arc}\tan(\infty)-\operatorname{Arc}\tan(1))=\frac{1}{Ln2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4.Ln2}$$

د) $I=\int\frac{(\operatorname{Arc}\cos 4x)^3}{\sqrt{1-16x^2}}dx$

حل:

$$\operatorname{Arc}\cos 4x=u \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}dx=du$$

$$I=\int\frac{u^3du}{-4}=\frac{u^4}{-4\times 4}+c=\frac{-1}{16}(\operatorname{Arc}\cos 4x)^4+c$$

م) $I=\int_1^e\frac{Ln^2x+2Lnx+3}{x}dx$

حل:

$$\text{Lnx} = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$

$$\begin{cases} x = 1 \to u = 0 \\ x = e \to u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \left(u^2 + 2u + 3\right)du = \left[\frac{u^3}{3} + u^2 + 3u\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) - 0 = \frac{13}{3}$$

ن) $I = \int_1^{10} \frac{3 - \log x}{x(\log x + 1)}dx$

حل:

$$\log x = u \Rightarrow \left(\frac{1}{x}.\frac{1}{\text{Ln10}}\right)dx = du$$

$$\begin{cases} x = 1 \to u = 0 \\ x = 10 \to u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \frac{(3-u)\text{Ln10}\,du}{u+1} = \text{Ln10}\int_0^1 \frac{3-u}{u+1}du = \text{Ln10}\int_0^1 \left(\frac{3}{u+1} - \frac{u+1-1}{u+1}\right)du = \text{Ln10}\int_0^1 \left(\frac{3}{u+1} - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$I = \text{Ln10}\int_0^1 \left(\frac{4}{u+1} - 1\right)du = \text{Ln10}\left[4\text{Ln}|u+1| - u\right]_0^1 = \text{Ln10}(4\text{Ln2} - 1 - 4\text{Ln1} - 0) = \text{Ln10}(4\text{Ln2} - 1)$$

و) $I = \int_0^{\text{Ln2}} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 8}dx$

حل:

$$\sqrt{e^x - 1} = u \Rightarrow \frac{e^x dx}{2\sqrt{e^x - 1}} = du \Rightarrow e^x dx = 2u\,du$$

$$\begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = \text{Ln2} \to u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2u(u)du}{(u^2+1)+8} = \int_0^1 \frac{2u^2\,du}{u^2+9} = 2\int_0^1 \frac{u^2\,du}{u^2+9}$$

$$I = 2\int_0^1 \frac{u^2+9-9}{u^2+9}du = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{9}{u^2+9}\right)du = 2\left[u - \frac{9}{3}\text{Arc tan}\left(\frac{u}{3}\right)\right]_0^1 = 2\left(1 - 3\text{Arc tan}\left(\frac{1}{3}\right) - 0 - 0\right) = 2 - 6\text{Arc tan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

هـ) $I = \int x\sqrt{3-x}\,dx$

حل:

$$\sqrt{3-x} = u \Rightarrow 3 - x = u^2 \Rightarrow x = 3 - u^2 \Rightarrow dx = -2u\,du$$

$$I = \int \left(3-u^2\right)u(-2udu) = \int \left(2u^4 - 6u^2\right)du = \frac{2}{5}u^5 - 2u^3 + c = \frac{2}{5}\left(\sqrt{3-x}\right)^5 - 2\left(\sqrt{3-x}\right)^3 + c$$

ی) $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{9+x^4}$

حل:

$$x^2=u \Rightarrow 2x\,dx=du$$
$$\begin{cases}x=0\to u=0\\ x=\sqrt{3}\to u=3\end{cases}$$
$$I=\int_0^3\frac{du}{2\left(9+u^2\right)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{3}\right)\right]_0^3=\frac{1}{6}\left(\operatorname{Arctan}(1)-\operatorname{Arctan}(0)\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{24}$$

ر) $I=\int x^{3x}\left(1+\ln x\right)dx$

حل:

$$x^{3x}=u \Rightarrow 3x\operatorname{Ln}x=\operatorname{Ln}u \Rightarrow (3\operatorname{Ln}x+3)dx=\frac{du}{u}$$
$$3(1+\operatorname{Ln}x)dx=\frac{du}{u}$$
$$I=\int\frac{u\,du}{3u}=\int\frac{du}{3}=\frac{u}{3}+c=\frac{x^{3x}}{3}+c$$

ز) $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^4}$

حل:

$$\operatorname{Ln}x=u \Rightarrow \frac{dx}{x}=du$$
$$x=e^2\to u=2$$
$$x=\infty\to u=\infty$$
$$I=\int_2^{\infty}\frac{du}{u^4}=\int_2^{\infty}u^{-4}du=\left[\frac{-1}{3}u^{-3}\right]_2^{\infty}=0+\frac{1}{3}(2)^{-3}=\frac{1}{24}$$

ب) روش جزء به جزء: اساس انتگرالگیری به روش جزء به جزءبر این روال استوار است که وقتی v و u دو تابع از متغیر x هستند داریم:

$$\int udv=uv-\int vdu$$
$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

توجه کنید dv باید طوری انتخاب شود که v به راحتی قابل حصول باشد به نکات زیر دقت کنید:

$$\int \underbrace{(\log\ \text{یا}\ \ln\ \text{یا}\ \text{توابع معکوس})}_{u}\ \underbrace{(\text{چند جمله‌ای یا}\ \sin\ \text{یا}\ \cos\ \text{یا}\ e^x)\,dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{(\text{چند جمله‌ای})}_{u} \underbrace{\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{Bmatrix} dx}_{dv}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر :

الف) $\int \text{Lnx}\,dx$

حل:

$$\begin{cases}\text{Lnx} = u\\ dx = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}dx = du\\ x = v\end{cases}$$

$$I = x\text{Lnx} - \int x\frac{dx}{x} = x\text{Lnx} - \int dx = x\text{Lnx} - x + c$$

ب) $\int (2x+3)\cos x\,dx$

$$\begin{cases}2x+3 = u\\ \cos x\,dx = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2dx = du\\ +\sin x = v\end{cases}$$

$$I = (2x+3)\sin x - \int 2\sin x dx = (2x+3)\sin x + 2\cos x + c$$

ج) $\int_0^1 x.\text{Arc}\tan x\,dx$

حل:

$$\begin{cases}\text{Arc}\tan x = u\\ x.dx = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dx}{1+x^2} = du\\ \frac{x^2}{2} = v\end{cases}$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\text{Arc}\tan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx = \left(\frac{1}{2}\text{Arc}\tan(1) - 0\right) - \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \left[\frac{1}{2}(x - \text{Arc}\tan x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \text{Arc}\tan(1) - 0 - 0) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

د) $\int (1-3x)e^{2x}dx$

حل:

$$\begin{cases} 1-3x=u \\ e^{2x}dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3dx=du \\ \dfrac{e^{2x}}{2}=v \end{cases}$$

$$I=(1-3x)\frac{e^{2x}}{2}-\int \frac{-3}{2}e^{2x}dx=(1-3x)\frac{e^{2x}}{2}+\frac{3}{4}e^{2x}+c$$

هـ) $\int (x^2+3x)\text{Ln}x\,dx$

حل:

$$\begin{cases} \text{Ln}x=u \\ (x^2+3x)dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x}=du \\ \dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3x^2}{2}=v \end{cases}$$

$$I=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\text{Ln}x-\int \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\text{Ln}x-\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\text{Ln}x-\frac{x^3}{9}+\frac{3x^2}{4}+c$$

در مواقع در محاسبه یک انتگرال ممکن است لازم باشد چند بار متوالی از روش جزء به جزء استفاده کنیم بخصوص در مسائلی

$$A=\int (\text{چند جمله‌ای از } x)\begin{Bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{Bmatrix}dx$$

$$B=\int e^{ax}\begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix}dx$$

در چنین مواردی روش جزء به جزء را می‌توان در جدولی خلاصه کرد. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

الف) $I=\int (x^3+3x)e^{-x}dx$

حل:

مشتق		انتگرال
x^3+3x	+	e^{-x}
$3x^2+3$	−	$-e^{-x}$
$6x$	+	e^{-x}
6	−	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$I=-\left(x^3+3x\right)e^{-x}-\left(3x^2+3\right)e^{-x}-\left(6x\right)e^{-x}-6e^{-x}$$
$$I=e^{-x}\left(-x^3-3x-3x^2-3-6x-6\right)=\left(-x^3-3x^2-9x-9\right)e^{-x}$$

ب) $I=\int (3-x)\sin 3x\,dx$

حل:

مشتق		انتگرال
$3-x$	$+$ ↘	$\sin 3x$
-1	$-$ ↘	$\frac{-1}{3}\cos 3x$
0		$\frac{-1}{9}\sin 3x$

$$I=\frac{-1}{3}(3-x)\cos 3x-\frac{1}{9}\sin 3x$$

ج) $I=\int e^{4x}.\sin x\,dx$

حل:

مشتق		انتگرال
e^{4x}	$+$ ↘	$\sin x$
$4e^{4x}$	$-$ ↘	$-\cos x$
$16e^{4x}$	$+\int$ →	$-\sin x$

$$I=-e^{-4x}.\cos x+4e^{4x}.\sin x-\int 16e^{4x}.\sin x=-e^{4x}.\cos x+4e^{4x}.\sin x-16I \Rightarrow 17I=-e^{4x}.\cos x+4e^{4x}.\sin x$$
$$I=\frac{1}{17}\left(4e^{4x}.\sin x-e^{4x}.\cos x\right)$$

د) $I=\int \left(\frac{1}{x}+\frac{6}{x^4}\right)e^{-x}dx$

حل:

$$I=\underbrace{\int \frac{1}{x}e^{-x}dx}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{6}{x^4}e^{-x}dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int \frac{1}{x}e^{-x}dx$$

مشتق		انتگرال
$\frac{1}{x}$	$+$	e^{-x}
$\frac{-1}{x^2}$	$-$	$-e^{-x}$
$\frac{+2}{x^3}$	$+$	e^{-x}
$\frac{-6}{x^4}$	$-\int$	$-e^{-x}$

$$I_1=\frac{-e^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}}{x^2}-\frac{2e^{-x}}{x^3}-\int\frac{6e^{-x}}{x^4}=e^{-x}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)-I_2\Rightarrow I=I_1+I_2=e^{-x}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)-I_2+I_2=e^{-x}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$$

روش تجزیه کسرها : اساس انتگرالگیری به روش تجزیه کسرها بر این روال استوار است که بطریق مناسب یک کسر را که ... م از آن انتگرالگیری کنیم بصورت مجموع چند کسر با مخرجهای ساده‌تر بنویسیم و سپس از کسرهای ساده‌تر انتگرالگیری

... روش تجزیه کسرها:

... $f(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$ باشد که در آن $P(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای از x بوده و درجه $P(x)$ از درجه $q(x)$ کوچکتر باشد، چنانچه بتوانیم $q(x)$ را بصورت حاصلضرب عوامل درجه اول و درجه دوم غیر قابل تجزیه بنویسیم این امکان وجود دارد $f(x)$ را بصورت مجموع چند کسر با مخرجهای ساده‌تر که اصطلاحاً کسرهای جزئی نامیده می‌شود بنویسیم . دقت کنید در ابتدای کار مجبوریم از ضرایب نا معینی استفاده کنیم که در انتها با متحد قرار دادن $f(x)$ با مجموعه نوشته شده می‌توان تکلیف آن ثابتها را مشخص نمود.

دقت کنید تعداد ثابتهای مورد استفاده در این روش دقیقاً برابر درجه $q(x)$ می‌باشد.

مثال: کسرهای زیر را بصورت مجموع کسرهای جزئی بنویسید (محاسبه ضرایب نامعین نیازی نیست)

الف) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+1)}$

ب) $f(x)=\frac{1}{x^4-81}=\frac{1}{(x^2-9)(x^2+9)}=\frac{1}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+9}$

ج) $f(x)=\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

د) $f(x)=\frac{x+3}{x^3-4x}=\frac{x+3}{x(x^2-4)}=\frac{x+3}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$

هـ) $f(x)=\frac{4}{(x-2)(x+3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{D}{(x+3)^3}$

ی) $f(x)=\frac{x-3}{(x^2+1)^3(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}+\frac{G}{x-1}+\frac{H}{(x-1)^2}$

مثال: های زیر را پیدا کنید.

الف) $I=\int\frac{x+11}{x^2+x-12}dx$

حل:

$$\frac{x+11}{x^2+x-12}=\frac{x+11}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

$$\frac{x+11}{x^2+x-12}=\frac{(A+B)x+4A-3B}{(x-3)(x+4)}$$ با متحد قرار دادن صورتها داریم:

$$\begin{cases}A+B=1\\4A-3B=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{-1}{x+4}\right)dx==2Ln|x-3|-Ln|x+4|+c=Ln\left|\frac{(x-3)^2}{x+4}\right|+C$$

ب) $I=\int\frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$

حل:

$$\frac{3x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\C=3\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=3\end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+3}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{3}{x^2+1}dx$$

$$I = Lnx - \frac{1}{2}Ln\left|x^2+1\right| + 3Arc\tan x + c = Ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + 3Arc\tan x + C$$

ج) $I = \int \frac{2x+3}{x^3+x}dx$

حل:

$$\frac{2x+3}{x^3+x} = \frac{2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-3 \\ C=2 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-3x+2}{x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{3x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$I = \int \left(\frac{3}{x} - \left(\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = 3Ln|x| - \frac{3}{2}Ln|x^2+1| + 2Arc\tan x + C$$

$$I = 3Ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + 2Arc\tan x + C$$

د) $I = \int \frac{dx}{x(x+2)^2}$

حل:

$$\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{-1}{4} \\ C=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}\right)dx$$

$$I = \frac{1}{4}Ln|x| - \frac{1}{4}Ln|x+2| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right) + C = \frac{1}{4}Ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + \frac{1}{2(x+2)} + C$$

م) $I = \int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

حل:

$$\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}=\frac{2x^2-1}{(x^2+4)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+4Cx+Dx^2+4D}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases}A+C=0\\B+D=2\\A+4C=0\\B+4D=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=3\\C=0\\D=-1\end{cases}$$

$$I=\int_0^{\infty}\left(\frac{3}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{3}{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{Arc\,tan}x\right]_0^{\infty}=\frac{3}{2}\operatorname{Arc\,tan}(\infty)-\operatorname{Arc\,tan}(\infty)-\frac{3}{2}\operatorname{Arc\,tan}(0)+\operatorname{Arc\,t}$$

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}(\infty)=\frac{\pi}{4}$$

نکته وش تجزیه کسرها می‌توان نشان داد:

$$1)\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$2)\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}Ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$$

مثال: مطلوب است حاصل انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int_0^1\frac{x}{x^4-16}dx$

حل:

$$x^2=u\Rightarrow 2xdx=du$$

$$\begin{cases}x=0\to u=0\\x=1\to u=1\end{cases}$$

$$I=\int_0^1\frac{du}{2(u^2-16)}=\left[\frac{1}{2}.\frac{1}{8}Ln\left|\frac{u-4}{u+4}\right|\right]_0^1=\frac{1}{16}\left(Ln\left(\frac{3}{5}\right)-Ln(1)\right)=\frac{1}{16}Ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

ب) $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$

حل:

$$e^x=u\Rightarrow e^xdx=du\qquad dx=\frac{du}{u}$$

$$I=\int\frac{du}{u(u+1)}=\frac{1}{0-(-1)}Ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+C=Ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$$

ج) $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)(\operatorname{Arc\,tan}^2x-1)}$

حل:

$$\text{Arc}\tan x = u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du$$

$$I = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{\text{Arc}\tan x - 1}{\text{Arc}\tan x + 1}\right| + C$$

د) $I = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-x-2}$

$$I = \int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \left[\frac{1}{2-(-1)}\text{Ln}\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right]_3^{\infty} = \left[\frac{1}{3}\text{Ln}\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right]_3^{\infty} = \frac{1}{3}\text{Ln}(1) - \frac{1}{3}\text{Ln}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{3}\text{Ln}\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\text{Ln}4$$

مثلثاتی

نوع اول : انتگرالهایی که از تبدیل حاصلضرب به حاصل جمع قابل حل می‌باشند، پس فرمولهای زیر را بخاطر بسپارید:

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

مثال : حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

الف) $I = \int \cos 5x.\sin 6x\, dx$

حل:

$$I = \int \frac{1}{2}(\sin 11x + \sin x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\cos 11x - \cos x\right) + C$$

ب) $I = \sin x.\sin 2x.\sin 3x\, dx$

حل: در ابتدا حاصلضرب $\sin x \sin 3x$ را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم .

$$I=\int \frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x\ dx$$

$$I=\int \frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x-\sin 2x\cos 4x)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 6x-\sin 2x)dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{8}\cos 4x+\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

ج) $I=\int \cos x.\cos 6x\ dx$

حل

$$I=\int \frac{1}{2}(\cos 7x+\cos 5x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C$$

نوع دوم : انتگرالهایی که از روش $\int u'u^m dx$ قابل حل می‌باشند.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر :

الف) $I=\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

حل:

$$\sin x=u \Rightarrow \cos x\ dx=du$$

$$I=\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\int u^{\frac{-1}{3}}du=\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}}+C$$

ب) $I=\int \frac{dx}{1-\sin x}$

حل: در ابتدا صورت و مخرج عبارت داخل انتگرال را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$I=\int \frac{1}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}dx=\int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$$

از طرفی می‌دانیم که: $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$, $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

پس داریم:

$$I=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\underbrace{\int\frac{dx}{\cos^2 x}}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx}_{I_2}$$

$$I_2:\cos x=u\ \Rightarrow\ -\sin x\,dx=du$$

$$I_2=\int\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{u}+C=\frac{1}{\cos x}+C\Rightarrow I_1+I_2=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$$

ج) $I=\int \sin 2x\cos^5 x\,dx$

$$I=\int 2\sin x\cos x\cos^5 x\,dx=2\int \sin x\cos^6 x\,dx$$

$$\cos x=u\ \Rightarrow\ -\sin x\,dx=du$$

$$I=2\int -u^6du=-2\frac{u^7}{7}+C=-2\frac{\cos^7 x}{7}+C$$

د) $I=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$

حل:

$$I=\int\frac{\left(1+\tan^2 x\right)dx}{\sqrt{1+\tan x}}$$

$$1+\tan x=u\ \Rightarrow\ \left(1+\tan^2 x\right)dx=du$$

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{\frac{-1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{1+\tan x}+C$$

نوع سوم : انتگرالهای توان زوج $\sin x$ و $\cos x$ ، برای حل این نوع مسائل باید از فرمولهای زیر بهره گرفت:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int \sin^2 7x\,dx$

حل:

$$I=\int\frac{1-\cos 14x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 14x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{28}\sin 14x+C$$

ب) $I=\int \cos^4 x\,dx$

حل:

$$I=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$$

ج) $I=\int\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$

حل:

طبق فرمول داریم: $\sin^6+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

$$I=\int\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)dx=\int\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx=\int 1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\int\left(1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$I=\frac{1}{8}\left(5x+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$$

د) $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

حل:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2.\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+C$$

نوع چهارم: انتگرال توان فرد $\sin x$ و $\cos x$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

الف) $I=\int\cos^3 x\,dx$

حل:

$$I=\int\cos^3 x\,dx=\int\cos x.\cos^2 x\,dx=\int\cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx=\underbrace{\int\cos dx}_{I_1}-\underbrace{\int\cos x\sin^2 x\,dx}_{I_2}$$

I_2 : $\sin x=u\Rightarrow\cos x dx=du$

$$I_2=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C=I_1+I_2=\sin x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

ب) $I=\int\frac{2\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

$$I=\int \frac{2\sin x.\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int \frac{2\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x}dx=\int \frac{2\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}dx=\int \left(2\sin x-2\sin x\cos x\right)dx$$

$$I=\int \left(2\sin x-\sin 2x\right)dx=-2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

۶ پنجم : انتگرالهای توان طبیعی $\tan x$ و $\cot x$.

لوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int \tan^3 x\,dx$

$$I=\int \left(\tan^3 x+\tan x-\tan x\right)dx=\int \left(\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x\right)dx=\frac{1}{2}\tan^2 x+\mathrm{Ln}\left|\cos x\right|+C$$

ب) $I=\int \cot^4 x\,dx$

حل:

$$I=\int \left(\cot^4 x+\cot^2 x-\cot^2 x+1-1\right)dx=\int \left(\cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right)-\left(1+\cot^2 x\right)+1\right)dx=\frac{-1}{3}\cot^3 x+\cot x+x+C$$

ج) $I=\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

حل:

$$I=\int \left(1+\tan^2 x\right)^2 dx=\int \left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)dx$$

$$I=\int \left(1+\tan^2 x\right)dx+\int \left(\tan^2 x+\tan^4 x\right)dx=\int \left(1+\tan^2 x\right)dx+\int \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C$$

نوع ششم: انتگرالهایی که معمولاً $\sin x$ و $\cos x$ با درجه یک در مخرج کسر باشند. در این صورت برای حل آن از تغییر متغیرهای زیر بهره می گیریم:

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2}=u \quad \Rightarrow \quad du=\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dx$$

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را بیابید.

الف) $I=\int \frac{1}{\sin x}dx$

حل:

$$I=\int \frac{1}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx=\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$\tan\frac{x}{2}=u \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=du \Rightarrow \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=2\,du$$

$$I=\int \frac{2du}{2u}=\int \frac{du}{u}=Ln|u|+C=Ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

ب) $I=\int \sec x\,dx$

$$I=\int \sec x\,dx=\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{dx}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$$\tan\frac{x}{2}=u \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=du$$

$$I=\int \frac{2du}{1-u^2}=(2)\left(\frac{-1}{2}\right)Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=Ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C=Ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|+C$$

ج) $I=\int \frac{1}{5+4\cos x}dx$

$$I=\int \frac{dx}{5+4\cos x}=\int \frac{dx}{5+4\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)}dx=\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{9+\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$$I=\int \frac{2du}{9+u^2}=\frac{2}{3}Arc\tan\left(\frac{u}{3}\right)+C=\frac{2}{3}Arc\tan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right)+C$$

نوع هفتم: انتگرالهایی که شامل $\sin 3x$ و $\cos 3x$ می‌باشد. در این صورت از فرمولهای زیر جهت انتگرالگیری استفاده می کنیم:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int \frac{\sin 3x+2\sin x}{\sin x}dx$ را بیابید.

حل:

$$I=\int \frac{3\sin x-4\sin^3 x+2\sin x}{\sin x}\,dx=\int \frac{3-4\sin^2+2}{1}\,dx$$

$$I=\int \left(5-4\sin^2 x\right)dx=\int 5-4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\int \left(5-2+2\cos 2x\right)dx=3x+\sin 2x+C$$

فرمولهای زیر را بخاطر بسپارید:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\mathrm{Ln}\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)=\mathrm{Arccosh}\,u$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\mathrm{Ln}\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\mathrm{Arcsinh}\,u$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال :

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

حل:

$$I=\left[\mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\mathrm{Arc}\tan x\right]_0^1=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{2}\right)-\mathrm{Arc}\tan(1)-\mathrm{Ln}(1)+\mathrm{Arc}\tan(0)=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{4}$$

سه تغییر متغیر مهم مثلثاتی :

الف) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارتی به صورت $\sqrt{a^2-u^2}$ باشد، معمولاً از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ استفاده می‌شود.

ب) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارتی به صورت $\sqrt{a^2+u^2}$ باشد، معمولاً از تغییر متغیر $u=a\tan\theta$ استفاده می‌شود.

ج) اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عبارتی به صورت $\sqrt{u^2-a^2}$ باشد، معمولاً از تغییر متغیر $u=a\sec\theta$ استفاده می شود.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

الف) $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

حل:

$$x=\sin\theta \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$
$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad \theta=0 \\ x=1 & \Rightarrow \quad \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\left|\cos\theta\right|d\theta$$

از آنجا که $\cos\theta>0$ همواره در فاصله $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ است پس داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4\theta\right)d\theta$$
$$I=\left[\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}-0-0+0=\frac{\pi}{16}$$

ب) $I=\int_{\sqrt{3}}^{3}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

حل:

$$x=3\tan\theta \Rightarrow dx=3\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$$
$$\begin{cases} x=\sqrt{3} & \Rightarrow \quad 0=\dfrac{\pi}{6} \\ x=3 & \Rightarrow \quad \theta=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$
$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{3\tan\theta\sqrt{9\tan^2\theta+9}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\tan\theta\sqrt{9\left(1+\tan^2\theta\right)}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(3)\frac{1}{\left|\cos\theta\right|}}d\theta$$

چون $\cos\theta$ در فاصله $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ مثبت است پس داریم :

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\sin\theta}d\theta=\frac{1}{3}\left[\operatorname{Ln}\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\operatorname{Ln}\left(\tan\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

ج) $I=\int\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

حل:

$$x=\sec\theta \Rightarrow dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
$$I=\int\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}.\sec\theta.\tan\theta\,d\theta=\int\tan^2\theta\,d\theta$$
$$I=\int\left(\tan^2\theta+1-1\right)d\theta=\int\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta-\int d\theta=\tan\theta-\theta+C=\tan\left(\operatorname{Arc}\sec x\right)-\operatorname{Arc}\sec x+C=\sqrt{x^2-1}-\operatorname{Arc}\sec x+C$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\frac{\pi}{4} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

اشته باشیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}=3t-\frac{3\pi}{2}$ ، t را بدست آورید.

ه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3t-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3t=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 3t=\frac{7\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{7\pi}{12}$$

« کاربرد انتگرال »

کاربردهای انتگرال معین :

۱ـ مقدار متوسط یک تابع در یک فاصله:

اگر تابع $[a,b]$ پیوسته باشد مقدار متوسط این تابع در فاصله مذکور را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

مثال: $f(x) = x.\sin x$ را در فاصله $[0,\pi]$ پیدا کنید.

حل:

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin x$
1	$-$	$-\cos x$
0		$-\sin x$

$$I = \int_0^\pi x.\sin x\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء خلاصه شده}}$$

$$I = \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^\pi = -\pi\cos\pi + \sin\pi + 0 - 0 = \pi$$

$$\overline{f} = \frac{\int_0^\pi x\sin x dx}{\pi - 0} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

مثال: مطلوب است مقدار متوسط تابع $f(x) = \sin 2x.e^{\cos^2 x}$ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

حل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.e^{\cos^2 x}dx$$

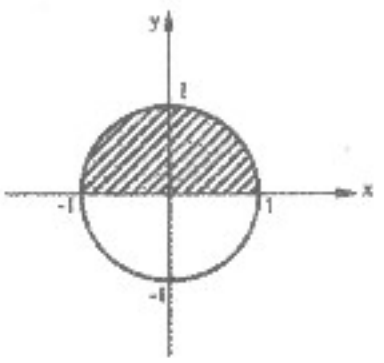
$$\cos^2 x = u \Rightarrow -2\sin x\cos x dx = du \Rightarrow -\sin 2x\,dx = du$$

$$\begin{cases} x = 0 \to u = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \to u = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_1^0 -e^u du = \int_0^1 e^u du = \left[e^u\right]_0^1 = e^1 - 1 = e - 1$$

$$\overline{f} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.e^{\cos^2 x}dx}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{e-1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(e-1)$$

مثال: مقدار متوسط تمام yهای مثبت دایره $x^2+y^2=1$ را پیدا کنید.



حل:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

مقدار متوسط برای yهای مثبت خواسته شده پس داریم: $y=\sqrt{1-x^2}$

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$x=\sin\theta \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ x=-1 \rightarrow \theta=\dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}.\cos\theta\, d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta|.\cos\theta d\theta$$

اما می‌دانیم که $\cos\theta$ در بازه $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ مثبت است پس خواهیم داشت:

$$I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{f}=\frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}{1-(-1)}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

قضیه مقدار میانگین درانتگرال: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، حداقل یک c متعلق به این فاصله وجود دارد بطوریکه:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$$

مثال: c قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x)=\sin 2x$ را در فاصله $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

حل:

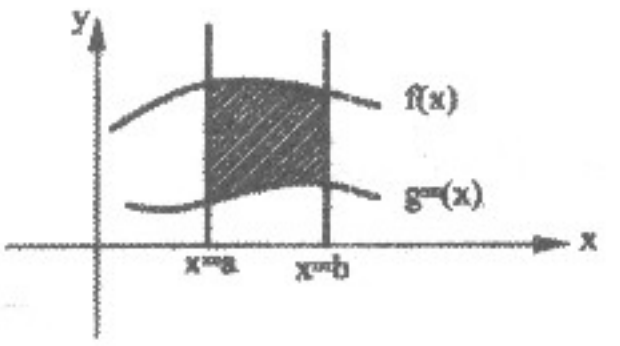
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{-1}{2}(-1-1)=1$$

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx}{\frac{\pi}{2}-0}=f(c)\Rightarrow\frac{1}{\pi/2}=\sin 2c\Rightarrow\sin 2c=\frac{2}{\pi}\Rightarrow c=\frac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

ح محصور به دو منحنی:

فرض $g(x)$ و $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته است و همواره $f(x)\geq g(x)$ باشد، آنگاه سطح محصور شده به منحنی های $x=a$ و $x=b$ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

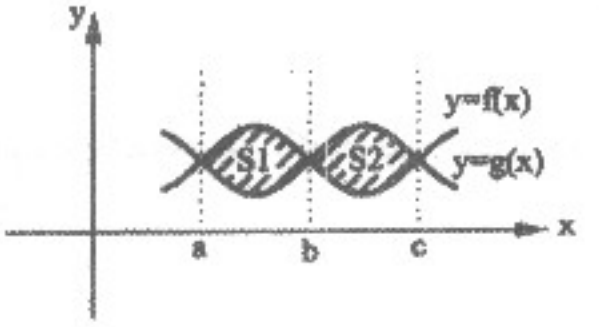
$$S=\left|\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$



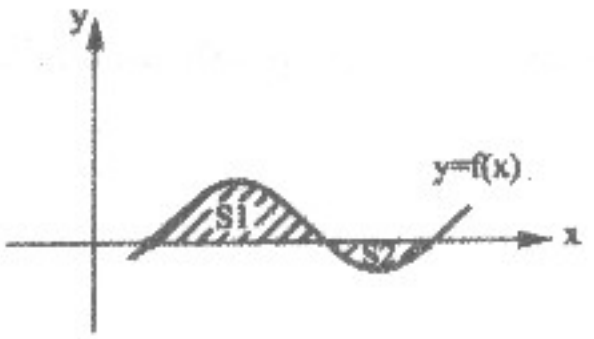
توجه: اگر هدف محاسبه سطح محدود شده به منحنی های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ باشد، نخست باید نقاط تلاقی این دو منحنی را پیدا کرده و سپس بین هر دو نقطه متوالی یک بار مساحت محدود شده به دو منحنی را بدست آورده و از طریق مجموع مساحتهای بدست آمده کل سطح مورد نظر را محاسبه می کنیم.

کل : $S=S_1+S_2$

کل : $S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_d^c\left(g(x)-f(x)\right)dx$

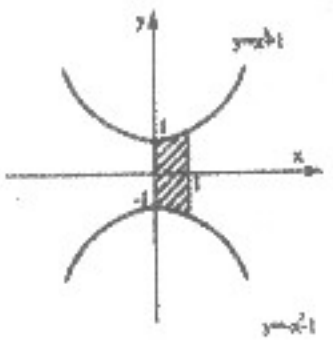


توجه : طبیعی است اگر سطح محدود شده به منحنی $y=f(x)$ و محورx ها مد نظر باشد در بحثهای فوق $g(x)=0$ خواهد بود.



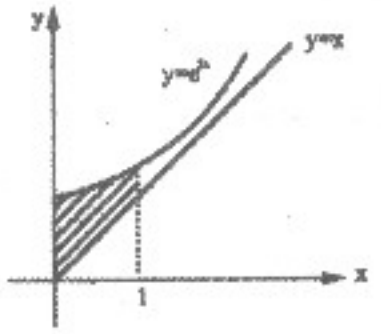
مثال: مساحت های هاشور خورده در اشکال زیر را محاسبه کنید.

الف)



$$S=\int_0^1\left[\left(x^2+1\right)-\left(-x^2-1\right)\right]dx=\int_0^1\left(2x^2+2\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{2}{3}+2\Rightarrow S=\frac{8}{3}$$

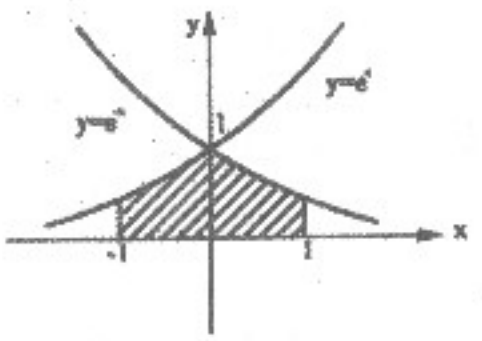
ب)



حل:

$$S=\int_0^1\left(e^{2x}-x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)\Rightarrow S=\frac{1}{2}e^2-1$$

ج)

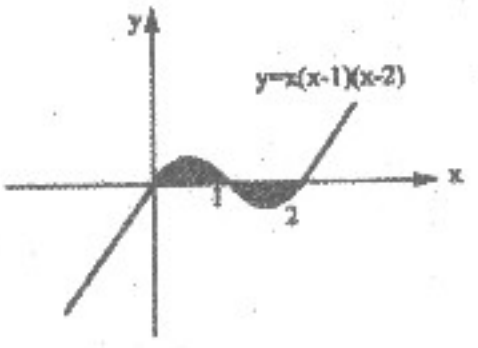


حل:

با توجه به متقارن بودن شکل می‌توان نصف سطح مذکور را محاسبه کرده و دوبرابر آن را به عنوان سطح کل گزارش کرد.

$$S=2\int_0^1\left(e^{-x}-0\right)dx=2\left[-e^{-x}\right]_0^1=2\left(-e^{-1}+1\right)=2-\frac{2}{e}$$

د)



حل:

$$S_1=\int_0^1\big(x(x-1)(x-2)-0\big)dx=\int_0^1\big(x^3-3x^2+2x\big)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(0-0+0)=\frac{1}{4}$$

$$S_2=\int_1^2\big(0-\big(x(x-1)(x-2)\big)\big)dx=\int_1^2\big(-x^3+3x^2-2x\big)dx=\left[\frac{-x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=(-4+8-4)-\left(\frac{-1}{4}+1-1\right)=\frac{1}{4}$$

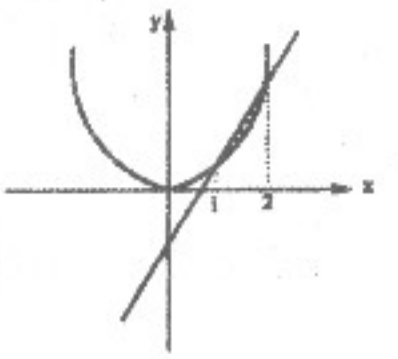
کل : $S=S_1+S_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

مثال ه به منحنی های $y=x^2$ و $y=3x-2$ را بدست آورید.

حل:

نخست نقاط برخورد دو منحنی را مشخص می کنیم.

$$\begin{cases}y=x^2\\ y=3x-2\end{cases}\Rightarrow x^2=3x-2\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=2\end{cases}$$



$$S=\int_1^2\Big[(3x-2)-\big(x^2\big)\Big]dx=\int_1^2\Big[3x-2-x^2\Big]dx=\left[\frac{3x^2}{2}-2x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(6-4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-2-\frac{1}{3}\right)$$

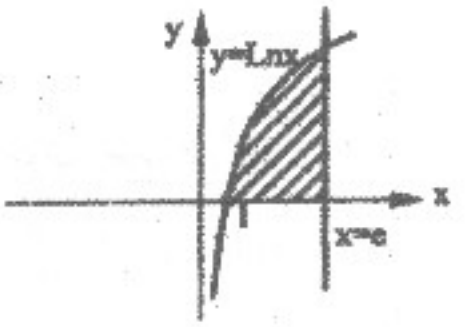
$$S=2-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود شده به منحنی $y=\text{Lnx}$ و محور x ها و خط $x=e$ را بیابید.

حل:

$$S=\int_1^e \text{Lnx}\,dx$$

$$\begin{cases}\text{Lnx}=u\Rightarrow\ \frac{1}{x}dx=dv\\ dx=dv\Rightarrow\ x=v\end{cases}$$



$$S=uv-\int vdu=x\,\text{Lnx}\Big|_1^e-\int_1^e x.\frac{dx}{x}=\Big[x\text{Lnx}-x\Big]_1^e$$

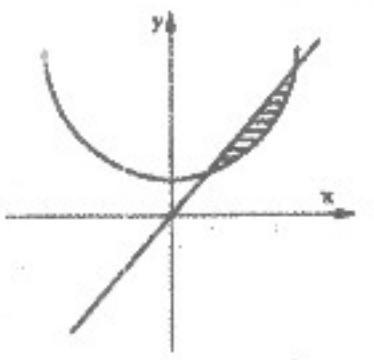
$$S=(e\text{Lne}-e)-(\text{Ln1}-1)=1$$

مثال: مطلوب است محاسبه سطح محصور شده بین دومنحنی $f(x)=x^2+4$ و $g(x)=5x$ درفاصله بین $x=4$ و $x=0$.

حل:

ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم.

$$x^2+4=5x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-4)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

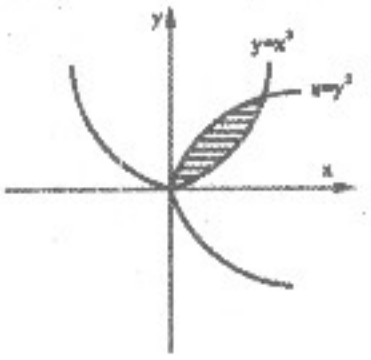


$$S=S_1+S_2$$

$$S=\int_0^1\left(x^2+4-5x\right)dx+\int_1^4\left(5x-x^2-4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+4x-\frac{5x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^4$$

$$S=\left(\frac{1}{3}+4-\frac{5}{2}\right)-(0)+\left(40-\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}-4\right)=\frac{19}{3}$$

د شده به منحنی های $y=x^2$ و $x=y^2$ را محاسبه کنید.

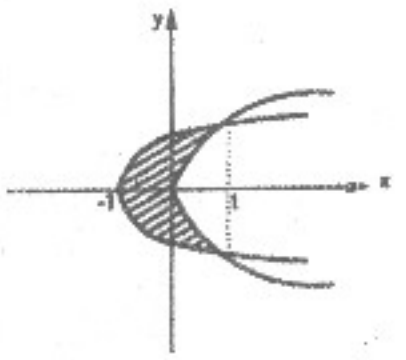


$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$

مثال: سطح محدود شده به منحنی $x=y^2$ و $x=2y^2-1$ را پیدا کنید.

حل:



$$\begin{cases} x=2y^2-1 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2=2y^2-1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

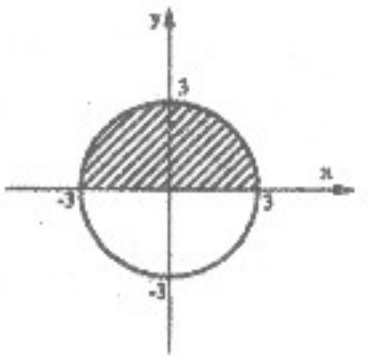
$$S=\int_{-1}^1\left(y^2-\left(2y^2-1\right)\right)dy=\int_{-1}^1\left(-y^2+1\right)dy=\left[\frac{-y^3}{3}+y\right]_{-1}^1$$

$$S=\left(\frac{-1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ را بیابید.

حل:

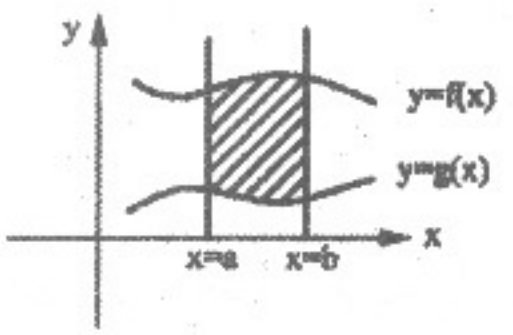
انتگرال فوق سطح محصور شده به منحنی $y=\sqrt{9-x^2}$ و محورx ها درفاصله $[-3,3]$ می‌باشدوالبته می‌دانیم که $y=\sqrt{9-x^2}$ نیم دایره ای به شعاع 3 می‌باشد و در حقیقت I سطح نشان داده شده در شکل زیر خواهد بود.



$$I = \text{نیم دایره } S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(3)^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

ج) محاسبه حجم حادث از دوران یک سطح حول محورهای مختصات:

به دقت کنید:



چنانچه را حول محورهای x و y دوران بدهیم حجم های حاصل از دوران به صورتهای زیر محاسبه می‌شود:

حجم حاصل از دوران حول محور x ها : $V_x = \pi\left|\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx\right|$

حجم حاصل از دوران حول محور y ها : $V_y = 2\pi\left|\int_a^b x.\left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$

مثال: سطح محدود شده به منحنی $y = \tan x$ و محور x ها را در فاصله $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ در نظر بگیرید.

اولاً) سطح را پیدا کنید.

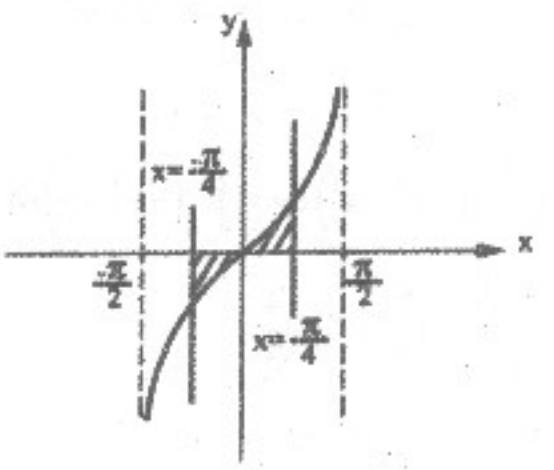
ثانیاً) اگر آن قسمت از این سطح که در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ قرار دارد را حول محور x ها دوران دهیم حجم حاصل چقدر خواهد بود.

حل:

الف) چون نمودار متقارن است داریم

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = 2\left[-\text{Ln}\left|\cos x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S = 2\left[-\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{Ln}(1)\right] \Rightarrow S = -2\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{Ln}2$$



ب) $V_x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x - 0\right)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

$$V_x = \pi\left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4} - 0 + 0\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

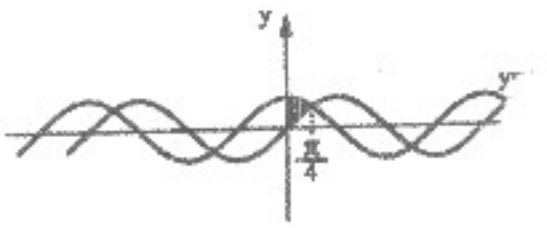
مثال: سطح محدود شده به منحنی های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و محورyها که در ربع اول دستگاه مختصات واقع شده است را در نظر بگیرید:

اولاً) سطح را پیدا کنید.

ثانیاً) در اثر دوران این سطح حول محور x ها چه حجمی حاصل می‌شود؟

حل:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$S = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) = \sqrt{2} - 1$$

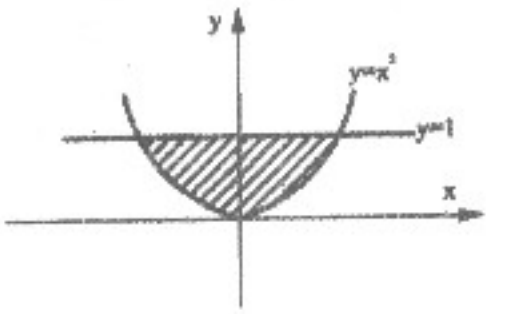
$$V_x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

مثال: سطح محدود شده به منحنی $y = x^2$ و خط $y = 1$ را درنظر بگیرید، اگر این سطح را حول محورهای x و y دوران دهیم حجم‌های حاصل از دوران را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$V_x = \pi\int_{-1}^{1}\left(1^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(1 - x^4\right)dx$$

$$V_x = 2\pi\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{5}\right) - 2\pi(0-0) = \frac{8\pi}{5}$$

$$V_y = 4\pi\int_0^1 \left(x - x^3\right)dx = 4\pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

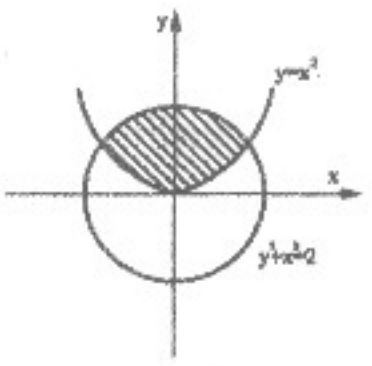
$$V_y = 4\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 4\pi(0-0) = \pi$$

مثال: سطح محدود شده به بالای نمودار $y = x^2$ و داخل دایره $x^2 + y^2 = 2$ را حول محور x ها دوران داده‌ایم حجم حاصله را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 + x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^4 + x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1, -2 \qquad \begin{cases} x^2 = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$V_x = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-x^4\right]dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^4\right)dx$$

$$V_x = \pi\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{44}{15}\pi$$



د) طول قوس یک منحنی:

۱- برای منحنی $y = f(x)$ در فاصله $[a,b]$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

۲- برای پارامتری $\begin{cases} x = P(t) \\ x = q(t) \end{cases}$ در فاصله $t=a$ و $t=b$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$L = \int_a^b \sqrt{P'^2(t)+q'^2(t)}\,dt$$

مثال: طول منحنی $y = \mathrm{Ln}(\cos x)$ را در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ محاسبه کنید.

حل:

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(-\tan x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \Big[\mathrm{Ln}(\sec x+\tan x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)-\mathrm{Ln}(1+0) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

مثال: طول قوس $60°$ از یک دایره به معادله $\begin{cases} x = 10\cos\theta \\ y = 10\sin\theta \end{cases}$ را بدست آورید.

حل:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{x'^2_\theta + y'^2_\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(-10\sin\theta)^2+(10\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{100\sin^2\theta+100\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{100}\,d\theta = \Big[10\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{10\pi}{3}$$

مثال: متحرکی بر روی منحنی $x = t^2$ و $y = \frac{1}{6}(1+4t)^{\frac{3}{2}}$ در حال حرکت است، این متحرک در فاصله $t=0$ تا $t=1$ چه مسافتی را طی می کند؟

حل:

در حقیقت منظور از مسافت طی شده همان طول قوس منحنی می‌باشد پس داریم:

$$x'_t = 2t$$

$$y'_t = \frac{1}{6}.\frac{3}{2}(4)(1+4t)^{\frac{1}{2}} = (1+4t)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left[(1+4t)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t+4t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1+2t)^2\, dt} = \int_0^1 (2t+1)dt = \left[t^2+t\right]_0^1 = 2$$

از خم فضایی به معادلات $x = \frac{2}{3}t^3 - t$ ، $y = t^2 - 1$ و $z = t^2 + 4$ از نقطه نظیر $t = 0$ تا $t = 3$ را محاسبه کنید.

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, dt = \int_0^3 \sqrt{(2t^2-1)^2 + (2t)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{4t^4 - 4t^2 + 1 + 4t^2 + 4t^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{4t$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(2t^2+1)^2}\, dt = \int_0^3 (2t^2+1)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + t\right]_0^3 = 18 + 3 - 0 = 21$$

مثال: طول قوس منحنی تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ از نقطه $x = 0$ تا $x = 1$ را بدست آورید.

حل:

$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y'^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\operatorname{Arcsin} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

هـ) محاسبه حد مجموع های نا متناهی :

می‌توان نشان داد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

مثال: مطلوب محاسبه حد مجموع های زیر:

الف) $I = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{-1}{n}} + e^{\frac{-2}{n}} + \cdots + e^{\frac{-n}{n}}}{n}$

حل:

$$I = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

ب) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

حل:

$$I=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\left[\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{-1}{\pi}\cos\pi+\frac{1}{\pi}\cos(0)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

ج) $I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n^2}}\right)$

حل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n^2}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\operatorname{Arc}\sin x\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

مثال: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ را بدست آورید.

حل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$I=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\int_0^1x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

« توابع دو متغیره »

یک تابع دو متغیره به صورت $z=f(x,y)$ تعریف می‌شود که در آن x و y متغیرهای مستقل و z را متغیر وابسته یا تابع می‌گوییم.

کنید داشته باشیم $f(x^3-1\ ,\ x^2+3y)=x-y^2$ مطلوب است محاسبه $f(7,-1)$ ؟

$$\begin{cases} x^3-1=7 \\ x^2+3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 4+3y=-1 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{-5}{3}$$

$$f(7,-1)=2-\left(\frac{-5}{3}\right)^2=2-\frac{25}{9}=\frac{-7}{9}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x-y\ ,\ 2x+y)=xy$ مطلوب است محاسبه $f(x,y)$.

حل:

$$\text{فرض کنیم}: \begin{cases} x-y=u \\ 2x+y=v \end{cases} \Rightarrow 3x=u+v \Rightarrow x=\frac{u+v}{3}$$

$$\frac{u+v}{3}-y=u \Rightarrow y=\frac{u+v}{3}-u \Rightarrow y=\frac{v-2u}{3}$$

حال می‌توان فرض مسئله را برحسب u و v بازنویسی کرد:

$$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{3},\frac{v-2u}{3}\right) \xrightarrow[v\to y]{u\to x} f(x,y)=\left(\frac{(x+y)(y-2x)}{9}\right)$$

دامنه و برد توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید به مجموعه‌ای از تمام زوجهای مرتب (x,y) که می‌توان در داخل ضابطه f قرار داد بدون آنکه به مشکل محاسباتی در مجموعه اعداد حقیقی برخورد کنیم دامنه تعریف (میدان تعریف) این تابع دو متغیره گفته می شود و به مجموعه مقادیر حاصله برای z که با قرار دادن تمام x و y های موجود در دامنه در داخل ضابطه f پدید می‌آید برد تابع مذکور گفته می‌شود.

معمولاً یک راه مناسب برای پیدا کردن برد توابع دو متغیره استفاده از یک سری بیانهای نا مساوی وار برای تولید ضابطه تابع و شناختن محدو دیتهای موجود برای z می‌باشد.

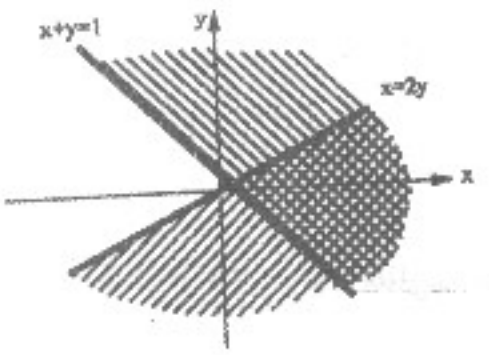
مثال: دامنه تعریف توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x,y)=\sqrt{x-2y}+\mathrm{Ln}(x+y-1)$

حل:

$$\begin{matrix} x-2y\geq 0 \Rightarrow x\geq 2y \\ x+y-1>0 \Rightarrow x+y>1 \end{matrix} \quad \Rightarrow D_f=\{(x,y)\,|\,x\geq 2y\ ,x+y>1\}$$

اگر بخواهیم میدان تعریف تابع را در شکل نمایش دهیم داریم:



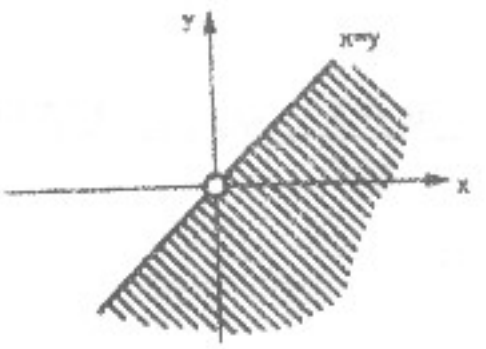
در کل میدان تعریف تابع قسمت مشترک دو ناحیه روبرو است.

ب) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-y}{x^2+y^2}}$

حل:

$x-y\geq 0 \Rightarrow x\geq y$

همواره برقرار است. $x^2+y^2>0 \rightarrow$



$$D_f=\{(x,y)\,|\,x\geq y\}-\{(0,0)\}$$

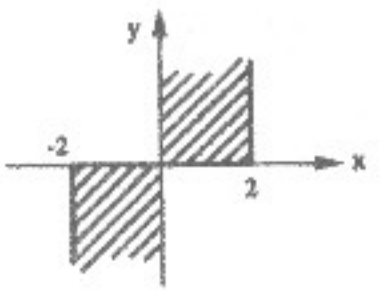
ج) $f(x,y)=\mathrm{Arc}\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$

حل:

$$-1\leq\frac{x}{2}\leq 1 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$$

$xy\geq 0$

پس میدان تعریف تابع مطابق شکر زیر خواهد بود:

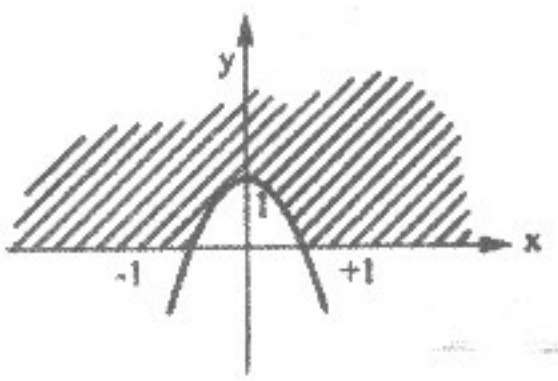


د) $f(x,y)=\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}+\mathrm{Ln}\left(y+x^2-1\right)$

حل:

$$\begin{matrix} y\geq 0 \\ y+x^2-1>0 \end{matrix} \Rightarrow D_f=\left\{(x,y)\middle| x^2+y-1\geq 0\,,\, y\geq 0\right\}$$

میدان تعریف تابع مطابق شکل زیر می‌باشد:



مثال: دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x,y)=x^2-3y+4$

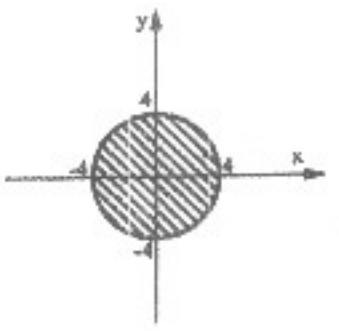
حل:

بدیهی است $D_f=\left\{(x,y)\middle| x\in R, y\in R\right\}=\mathbb{R}^2$

$$R_f=\mathbb{R}$$

ب) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$

حل:



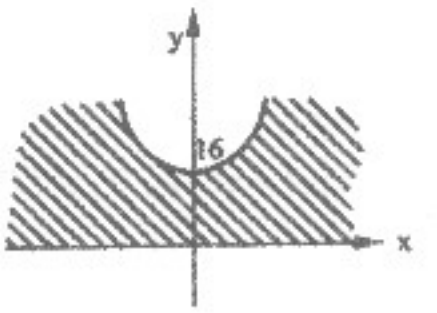
$$16-x^2-y^2\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2\leq 16$$
$$D_f=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 16\right\}$$

برای یافتن برد می‌توان گفت:

$$0 \le 16 - x^2 - y^2 \le 16 \Rightarrow 0 \le \sqrt{16 - x^2 - y^2} \le \sqrt{16} \Rightarrow 0 \le \sqrt{16 - x^2 - y^2} \le 4 \Rightarrow R_f = [0,4]$$

ج) $f(x,y) = \sqrt{16 + x^2 - y}$

حل:



$16 + x^2 - y \ge 0 \Rightarrow 16 + x^2 \ge y$

$D_f = \{(x,y) \mid y \le 16 + x^2\}$

برای یافتن برد می‌توان نوشت:

$$0 \le 16 + x^2 - y < \infty \Rightarrow 0 \le \sqrt{16 + x^2 - y} < +\infty \Rightarrow R_f = [0,+\infty)$$

د) $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2 + e^2)$

حل:

$x^2 + y^2 + e^2 > 0$ ⟵ همواره برقرار است

$D_f = \mathbb{R}^2$

برای یافتن برد ملاحظه می‌شود که:

$$0 \le x^2 + y^2 < \infty \Rightarrow e^2 \le x^2 + y^2 + e^2 < \infty \Rightarrow Ln(e^2) \le Ln(x^2 + y^2 + e^2) \le Ln(\infty)$$
$$\Rightarrow 2 \le Ln(x^2 + y^2 + e^2) \le \infty \Rightarrow R_f = [2,+\infty)$$

م) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4}}$

حل:

$x^4 + y^4 \ne 0$

$\Rightarrow D_f = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\} - \{(0,0)\} = R^2 - \{(0,0)\}$

برای یافتن برد می‌توان نوشت:

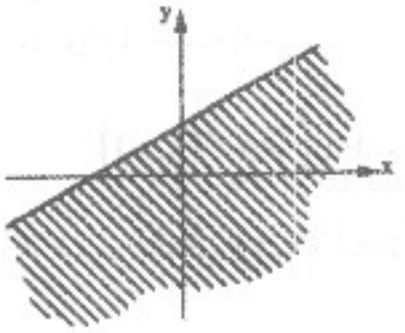
$$0<x^4+y^4<+\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}<\frac{1}{x^4+y^4}<\frac{1}{0} \Rightarrow 0<\frac{1}{x^4+y^4}<\infty \Rightarrow 0<\sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}}<\infty \Rightarrow R_f=(0,+\infty)$$

ن) $f(x,y)=\log(x-2y+3)$

حل:

$$x-2y+3>0 \Rightarrow 2y<x+3 \Rightarrow y<\frac{x+3}{2}$$

$$D_f=\left\{(x,y)\middle|y<\frac{x+3}{2}\right\}$$



برای یافتن برد می‌توان نوشت:

$$0<x-2y+3<+\infty \Rightarrow \log(0)<\log(x-2y+3)<\log(+\infty)$$
$$-\infty<\log(x-2y+3)<+\infty \Rightarrow R_f=\mathbb{R}$$

و) $f(x,y)=\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}$

حل:

$$xy\geq 0\ ,\ x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow D_f=\{(x,y)|xy\geq 0\}-\{(0,0)\}$$

از طرفی داریم:

$$(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy$$
$$0\leq\frac{2xy}{x^2+y^2}\leq 1 \Rightarrow 0\leq\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\leq 1 \Rightarrow R_f=[0,1]$$

حد توابع دو متغیره

برای محاسبه حد تابع دو متغیره‌ای مانند $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ چنانچه به جای x و y مقادیر x_0 و y_0 را قرار دهیم و به مشکل محاسباتی خاصی مانند یکی از حالات ابهام برخورد نکنیم معمولاً حاصل حد را بدون هیچ مشکلی یافته ایم.

اما اگر با انجام این کار به یکی از حالات ابهام مانند : $\frac{0}{0}$ برخورد کنیم باید تکلیف حد را به طریق دیگری مشخص نماییم.

- حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود منحصر به فرد است یعنی اگر یک حد دو متغیره موجود باشد روش پیدا کردن آن نباید به جوابهای گوناگون بی انجامد.

نکته: اگر بخواهیم بدانیم که تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای حد می‌باشد یا خیر می‌توان از یکی از روشهای زیر بهره گرفت:

الف) اگر ترتیب میل دادن متغیرها در مقدار حد موثر باشد، تابع مورد نظر در آن نقطه دارای حد نیست یعنی :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)\neq \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

حال اگر ترتیب میل دادن متغیرها در مقدار حد بی تاثیر باشد تابع مورد نظر در آن نقطه دارای حد است یعنی :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)= \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

ب) اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ باشد آنگاه از هر مسیر دلخواهی که به نقطه (x_0,y_0) نزدیک شویم مقدار $\lim f(x,y)$ نباید تغییری بکند، لذا اگر از دو مسیر مختلف به نقطه (x_0,y_0) نزدیک شویم و مقدار حد یکسان نگردد، تابع در آن نقطه حد نخواهدداشت.

ج) زمانی که $(x,y)\to(0,0)$ ، استفاده از دستگاه مختصات قطبی یعنی تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ می‌تواند تحلیل یک حد دو متغیره را ساده تر کند و خواهیم داشت $(r\to 0,\forall\theta)$ ، θ هر مقدا طبیعی می‌تواندباشد، اگر جواب نهایی به θ بستگی داشته باشد حاصل حد مورد نظر وجود نخواهد داشت در غیر این صورت حد موجود می‌باشد.

مثال: حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $I=\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin\left(\frac{y}{4}\right)$

حل:

$$I=(4)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=16.\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$$

ب) $I=\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)}\frac{1}{x}\sin(xy)$

حل:

مبهم $I=\infty\times 0$

زمانی $(x,y)\to(0,4)$ داریم : $\sin xy\sim xy$

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,4)}\frac{1}{x}xy=\lim_{y\to 4}y=4$$

ج) $I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$

حل:

اگر روی خط $y=mx$ که از مبدا مختصات می‌گذرد به محاسبه حد بپردازیم ، داریم:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)e^{mx^2}}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2e^{mx^2}}{x^2+mx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{me^{mx^2}}{1+m}\Rightarrow I=\frac{m}{1+m}$$

چون جواب به m بستگی دارد پس حد مذکور موجود نمی‌باشد.

د) $I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

حل:

$I=\frac{0}{0}$ مبهم

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad (x,y)\to(0,0)\Rightarrow(r\to 0\ ,\ \forall\theta)$$

$$I=\lim_{\forall\theta,\ r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}=\lim_{\forall\theta\ ,r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}=I=\lim_{\forall\theta,\ r\to 0}r\sin\theta\cos\theta=\lim_{\forall\theta,\ r\to 0}r\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)=0\times \text{عبارت کراندار}=0$$

پس نزدیک شدن به نقطه $(0,0)$ با هر θ میسر است و جواب صفر می‌باشد پس حد مذکور موجود می‌باشد.

م) $I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|^x$

حل:

$I=0^0$ مبهم

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}|y|^x\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}|y|^x\right)=\lim_{y\to 0}1=1$$

پس حد مذکور موجود نمی‌باشد.

مثال: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ بر R^2 پیوسته باشد a را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}=\frac{0}{0}$$ مبهم

با استفاده از مختصات قطبی و تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم :

$$I=\lim_{\forall\theta,\ r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{|r\cos\theta|+|r\sin\theta|}=\lim_{\forall\theta,r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$$

از آنجا که $|\cos\theta|+|\sin\theta|$ به ازای هیچ θ ای صفر نمی‌شود در نتیجه حاصل حد فوق برابر صفر است و چون طبق فرض $f(0,0)=a$، لذا تابع مذکور به ازای $a=0$ در مبدا مختصات پیوسته است.

مشتقات نسبی (جزئی) در توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید وقتی می گوییم : $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ یا z'_x یا z_x منظور آن است که می‌خواهیم از تابع z با این فرض که y ثابت است نسبت به متغیر x مشتق گیری کنیم، همچنین وقتی می‌نویسیم: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ یا z''_{xy} یا z_{xy} منظور آن است که می‌خواهیم از $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ بدست آمده در قسمت قبلی این بار با فرض اینکه x ثابت است نسبت به متغیر y مشتق گیری کنیم.

قضیه مشتقهای آمیخته:

اگر $z=f(x,y)$ باشد داریم :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x,y)=y^2\mathrm{Ln}x+x^3e^{3y}$ مطلوب است محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2\left(\frac{1}{x}\right)+3x^2e^{2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\mathrm{Ln}x+2x^3e^{2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2y\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2e^{2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2y\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2e^{2y}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z = x^4 + ax^2y^2 + by^4$، مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $z_{xx} + z_{yy} = 0$

حل:

$$z_x = 4x^3 + 2axy^2 \Rightarrow z_{xx} = 12x^2 + 2ay^2$$

$$z_y = 2ayx^2 + 4by^3 \Rightarrow z_{yy} = 2ax^2 + 12by^2$$

داریم : $z_{xx} + z_{yy} = 0 \Rightarrow 12x^2 + 2ay^2 + 2ax^2 + 12by^2 = 0 \Rightarrow (12 + 2a)x^2 + (2a + 12b)y^2 = 0$

$$\begin{cases} 12 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6 \\ 2a + 12b = 0 \Rightarrow -12 + 12b = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x,y) = \mathrm{Ln}(x^2 - yx)$ مطلوب است محاسبه : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 - yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 - yx}\right) = \frac{(-1)(x^2 - yx) - (2x - y)(-x)}{(x^2 - yx)^2} = \frac{x^2}{(x^2 - yx)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2 - yx}\right) = \frac{0 - (-x)(-x)}{(x^2 - yx)^2} = \frac{-x^2}{(x^2 - yx)^2}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z = (x^2 + \sin x)^{(y^3 - y)}$ مطلوب است محاسبه : $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y^3 - y)(2x + \cos x)(x^2 + \sin x)^{(y^3 - y - 1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3y^2 - 1)(x^2 + \sin x)^{(y^3 - y)} . \mathrm{Ln}(x^2 + \sin x)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z = (x^2 + y^3)^{xy}$ مطلوب است محاسبه: $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل:

لازم است نخست از طرفین رابطه بالا Ln بگیریم:

$$\mathrm{Ln}z = \mathrm{Ln}(x^2 + y^3)^{xy} \Rightarrow \mathrm{Ln}z = xy.\mathrm{Ln}(x^2 + y^3)$$

از طرفین رابطه بالا یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y مشتق گیری می کنیم.

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} = y.Ln\left(x^2+y^3\right)+\frac{2x}{x^2+y^3}(xy) = yLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{2x^2y}{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\left(yLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{2x^2y}{x^2+y^3}\right) = \left(x^2+y^3\right)^{xy}.\left(yLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{2x^2y}{x^2+y^3}\right)$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z} = xLn\left(x^2+y^3\right)+\left(\frac{3y^2}{x^2+y^3}\right)(xy) = xLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{3y^3x}{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(xLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{3y^3x}{x^2+y^3}\right) = \left(x^2+y^3\right)^{xy}.\left(xLn\left(x^2+y^3\right)+\frac{3y^3x}{x^2+y^3}\right)$$

مثال: چنانچه داشته باشیم $z=\int_{x^2+y^2}^{xy}\sqrt{t^2+1}\,dt$ حاصل z'_y را در $x=y=1$ محاسبه کنید.

حل:

$$z'_y = x\sqrt{(xy)^2+1}-2y\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+1}$$

$$x=y=1 \text{ در }: z'_y = 1\sqrt{1+1}-2\sqrt{4+1} = \sqrt{2}-2\sqrt{5}$$

مشتق گیری ضمنی در توابع دو متغیره

فرض کنیدداشته باشیم $H(x,y,z)=0$. (دقت کنید در چنین رابطه‌ای دو متغیر می‌تواند متغیرهای مستقل و متغیر سوم (هر کدام) باید وابسته به دوتای دیگر باشد) می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial x}}$$

مثال: فرضی کنید داشته باشیم : $x^y+y^z=3-z$ حاصل z'_y را در نقطه $(1,1,1)$ بدست آورید.

حل:

با استفاده از قاعده مشتق گیری ضمنی در توابع دو متغیره داریم:

$$H(x,y,z)=x^y+y^z-3+z=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{H_y}{H_z} = -\frac{x^yLnx+zy^{z-1}}{y^zLny+1}$$

در $x=y=z=1$ داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1(Ln1)+1(1)}{1(Ln1)+1} = -1$$

مثال : اگر $z = \text{Arc}\tan\frac{x-y}{x+y}$ باشد آنگاه $\frac{\partial y}{\partial x}$ برابر خواهد بود با:

الف) $-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}$ ب) $\frac{\tan z+1}{\tan z-1}$ ج) $\frac{1-\tan z}{1+\tan z}$ د) $-\frac{\tan z+1}{\tan z-1}$

حل:

$$z = \text{Arc}\tan\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \tan z = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow x\tan z + y\tan z - x + y = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}} = -\frac{\tan z - 1}{\tan z + 1} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-\tan z}{1+\tan z}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $\text{Ln}\left(x^2+y-xz\right)+z^2e^{y-x} = y$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $(1,1,1)$.

حل:

$$H(x,y,z) = \text{Ln}\left(x^2+y-xz\right)+z^2e^{y-x} - y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{H_y}{H_z} = -\frac{\frac{1}{x^2+y-xz} + z^2e^{y-x} - 1}{\frac{-x}{x^2+y-xz} + 2ze^{y-x} - 0}$$

در نقطه $x = y = z = 1$ داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{1}{1+1-1}+1(1)-1}{\frac{-1}{1+1-1}+2(1)} = -1$$

مشتق گیری زنجیره‌ای در توابع دو متغیره

قواعد مشتق گیری زنجیره‌ای متعددی در توابع چند متغیره موجود است که همگی از یک روال کلی تبعیت می کنند و به سادگی قابل تعمیم می‌باشند. به دو نکته زیر توجه کنید:

نکته: فرض کنید داشته باشیم $z = f(x,y)$ و بدانیم $y = y(t)$ و $x = x(t)$ ، بنابراین در چنین شرایطی طبیعی است که z را می‌توان تابعی از یک متغیر به نام t دانست و نشان داد:

$$\frac{dz}{dt} = z'_t = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

نکته: فرض کنید داشته باشیم $z = f(u,v)$ و بدانیم $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ در چنین شرایطی طبیعی است z را می‌توان تابعی از متغیرهای y و x قلمداد کرد و می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $y=t^2-s$ و $x=t+3s$ و $z=x^2-y^3x$ ، حاصل عبارتهای $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را به ازای $s=0$ و $t=1$ بیابید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}=\left(2x-y^3\right).(3)+\left(-3y^2x\right)(-1)\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s}=6x-3y^3+3y^2x$$
$$\begin{cases}t=1\\ s=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s}=6(1)-3(1)^3+3(1)(1)=6$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=\left(2x-y^3\right)(1)+\left(-3y^2x\right)(2t)\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t}=2x-y^3-6y^2xt$$
$$\begin{cases}t=1\\ s=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t}=2(1)-(1)^3-6(1)^2(1)(1)=-5$$

مثال: اگر $z=x^2+2xy+y^2$ و $x=t\cos t$ و $y=t\sin t$ و مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

حل:

طبق قاعده مشتق گیری زنجیره ای داریم:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$\frac{dz}{dt}=(2x+2y)(\cos t-t\sin t)+(2y+2x)(\sin t+t\cos t)$$
$$t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{-\pi}{2}\right)+\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)(1)=\pi\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z=\mathrm{Ln}\left(u^2+v^2w\right)+v\,w^2$ و $u=xy^2$ و $v=x^2y+x$ و $w=y^3-x^2$ مطلوب است محاسبه مشتق $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $x=y=z=1$.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{2u}{u^2+v^2w}\right)\left(y^2\right)+\left(\frac{2vw}{u^2+v^2w}+w^2\right)(2xy+1)+\left(\frac{v^2}{u^2+v^2w}+2vw\right)(-2x)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=y=z=1}=\left(\frac{2}{1+0}\right)(1)+\left(\frac{0}{1+0}+0\right)(2+1)+\left(\frac{1}{1+0}+0\right)(-2)=2-2=0$$

مثال: اگر $z=u^2+v^2-2uv$ و $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ باشد $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ را در $\theta=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

حل:

راه حل اول :

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=(2u-2v)(-r\sin\theta)+(2v-2u)(r\cos\theta)$$
$$=2(r\cos\theta-r\sin\theta)(-r\sin\theta)+2(r\sin\theta-r\cos\theta)(r\cos\theta)$$
$$=2\left(r^2\sin^2\theta-r^2\cos\theta\sin\theta\right)+2\left(r^2\sin\theta\cos\theta-r^2\cos^2\theta\right)$$
$$=2r^2\sin^2\theta-2r^2\cos^2\theta-2r^2\cos\theta\sin\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta=2r^2\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)$$
$$=-2r^2\cos2\theta\ \Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=2r^2$$

راه حل دوم :

$$z=\left(r^2\cos^2\theta\right)+\left(r^2\sin^2\theta\right)-2(r\cos\theta)(r\sin\theta)=r^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)-2\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)=r^2-r^2\sin2\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=-2r^2\cos2\theta\ \Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=2r^2$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z=F\left(x^4+y^3\right)$ که در آن F تابع اختیاری است مطلوب است محاسبه :

$$I=3y^2\frac{\partial z}{\partial x}-4x^3\frac{\partial z}{\partial y}$$

حل:

$$x^4+y^3=u\ \Rightarrow\ z=f(u)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}.\left(4x^3\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\left(3y^2\right)$$
$$\Rightarrow I=3y^2\left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(4x^3\right)\right)-4x^3\left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(3y^2\right)\right)=0$$

دیفرانسیل کامل یک تابع دو متغیره

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید، دیفرانسیل های کامل این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

دیفرانسیل کامل مرتبه اول : $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial x}{\partial y}dy$

دیفرانسیل کامل مرتبه دوم : $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

دیفرانسیل کامل مرتبه n ام: $d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.z$

نکته: دیفرانسیل کامل را می‌توان برای توابعی که بیش از دو متغیر دارند نیز تعمیم داد به عنوان مثال برای تابع سه متغیره‌ای مانند $w=f(x,y,z)$ داریم :

$$dw=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

نکته: شرط آنکه عبارتی مانند : $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ یک دیفرانسیل کامل باشد آن است که داشته باشیم: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $z=x^2+y^2+xy$ مقدار dz را در نقطه $x=y=1$ بدست آورید.

حل:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x+y)dx+(2y+x)dy=3dx+3dy$$

مثال: اگر داشته باشیم $f(x,y)=\int_{x^2y}^{x+y^2}\sqrt{t+Lnt}\,dt$ مطلوب است محاسبه دیفرانسیل کامل این تابع در نقطه $(1,1)$.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{(x+y^2)+Ln(x+y^2)}-2xy\sqrt{x^2y+Ln(x^2y)}=\sqrt{2+Ln2}-2\sqrt{1+0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\sqrt{(x+y^2)+Ln(x+y^2)}-x^2\sqrt{x^2y+Ln(x^2y)}=2\sqrt{2+Ln2}-\sqrt{1+0}$$
$$df=\left(\sqrt{2+Ln2}-2\right)dx+\left(2\sqrt{2+Ln2}-1\right)dy$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z=Lny+e^{x^2}+xy$ ، دیفرانسیل کامل مرتبه دوم z را در نقطه $(1,1)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x.e^{x^2}+y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e+4e=6e$$

$$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}+x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{y^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy$$

$$d^2z=6edx^2-dy^2+2dxdy$$

مثال: مقادیر b و a را طوری تعیین کنید تا عبارت زیر یک دیفرانسیل کامل باشد.

$$\left(ax^2\cos 2y+y^3e^x\right)dx+\left(by^2e^x-2x^3\sin 2y+y\right)dy$$

حل:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow -2ax^2\sin 2y+3y^2e^x=by^2e^x-6x^2\sin 2y$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-6=-2a\\3=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$$

توابع دو متغیره همگن

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را تابع همگن از درجه α می‌گوییم هرگاه به ازای هر عدد دلخواه $\lambda>0$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}f(x,y)$$

قضیه اویلر: هرگاه $z=f(x,y)$ تابع همگن از درجه α باشد آنگاه داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha.z$$

مثال: وضعیت همگن یا غیر همگن بودن توابع زیر را مشخص کنید و برای توابع همگن درجه همگنی را تعیین کنید.

الف) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x-y}$

حل:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^3x^3.\lambda^2y^2}{\lambda x.\lambda y}=\lambda^4\frac{x^3y^2}{x-y}=\lambda^4f(xy)$$

پس z همگن از درجه $\alpha = 4$ است.

ب) $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{xyz}$

حل:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2+\lambda^2z^2}}{\lambda^3xyz}=\frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^3}}{\lambda^3xyz}=\frac{1}{\lambda^2}f(x,y,z)$$

پس z همگن از درجه $\alpha = -2$ است.

ج) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{y}{x+y}\right)$

حل:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x+\lambda y}\right)=\cos\left(\frac{y}{x+y}\right)=f(x,y)$$

پس z همگن از درجه $\alpha = 0$ است.

د) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x^2}$

حل:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2}{\lambda y}+\frac{\lambda y}{\lambda^2x^2}=\lambda\frac{x^2}{y}+\frac{1}{\lambda}\frac{y}{x^2}$$

پس z همگن نمی‌باشد.

م) $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)$

حل:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\left(\frac{\lambda^2xy}{\lambda x+\lambda y}\right)=\sin\left(\lambda\frac{xy}{x+y}\right)$$

پس z همگن نمی‌باشد.

مثال: اگر داشته باشیم $z=x^3\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$ مطلوب است:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

حل: اگر کمی دقت کنید می‌بینید که تابع مورد نظر همگن از درجه $\alpha = 3$ می‌باشد پس طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $w = \frac{x+y+z}{x^3y^3z^3}$ مطلوب است محاسبه :

$$xw'_x + yw'_y + zw'_z$$

حل:

تابع w همگن از درجه $\alpha = -8$ است پس داریم :

$$xw'_x + yw'_y + zw'_z = -8w$$

مثال: حاصل $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ را با فرض $f(x,y) = \text{Arccos}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ بدست آورید.

حل: داریم :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \text{Arccos}\frac{\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}}{\lambda x+\lambda y} = \text{Arccos}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} = f(x,y)$$

پس تابع مورد نظر همگن از درجه $\alpha = 0$ می‌باشد و می‌توان نشان داد:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \times f(x,y) = 0 \Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-y}{x}$$

گرادیان یک تابع اسکالر

تابع $w = f(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. گرادیان این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad}\, w = \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

نکته: اگر معادله یک سطح فضایی بصورت $f(x,y,z) = 0$ بیان شده باشد، بردار حاصله از گرادیان تابع $(\text{grad}\, f)f$ در هر نقطه از سطح مورد نظر بردار عمود بر آن سطح را در همان نقطه نشان می‌دهد. و همین بردار، هم توصیف کننده بردار نرمال صفحه مماس بر رویه و هم توصیف کننده پارامترهای هادی خط عمود بر رویه می‌باشد.

مثال: گرادیان تابع $w = y^3e^{2x} + xz^2$ را در نقطه $(1,2,3)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\text{grad } w = \left(2y^3e^{2x} + z^2\right)\vec{i} + \left(3y^2e^{2x}\right)\vec{j} + (2xz)\vec{k}$$

در نقطه $(1,2,3)$ داریم $\Rightarrow \quad \vec{\nabla}w = \left(16e^2 + 9\right)\vec{i} + \left(12e^2\right)\vec{j} + 6\vec{k}$

مثال: در نقطه‌ای با مختصات $(1,2,1)$ از سطح رویه $x^2 + y - z - 2 = 0$ ، بر این رویه صفحه‌ای مماس و خط عمودی رسم کرده‌ایم معادلات آنها را بنویسید.

حل:

همانطور که می‌دانید گرادیان تابع در نقطه مورد نظر بردار عمود بر آن سطح در آن نقطه را توصیف می‌کند پس داریم :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \text{grad} f = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

معادله صفحه مماس : $2(x-1) + 1(y-2) - 1(z-1) = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 3$

معادله خط قائم : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = y-2 = 1-z$

مثال: معادله صفحه مماس بر سطح $x^2 = 12y$ در نقطه $(6,3,1)$ را بدست آورید.

حل:

با نوشتن معادله به صورت $F(x,y,z) = x^2 - 12y = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla}F = 2x\vec{i} - 12\vec{j} + 0$$

لذا بردار عمود بر رویه در نقطه $(6,3,1)$ عبارت است از: $\vec{N} = 12\vec{i} - 12\vec{j} + 0\vec{k}$

معادله صفحه مماس : $12(x-6) - 12(y-3) + 0 = 0 \Rightarrow x - y = 3$

مثال: صفحه مماس بر رویه $xyz = a^3$ ($a>0$ ثابت) در نقطه (a,a,a) همراه با صفحات مختصات تشکیل یک چهار وجهی می‌دهند حجم آن را محاسبه کنید.

حل:

با نوشتن معادله رویه به صورت $f(x,y,z) = xyz - a^3 = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla}f = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

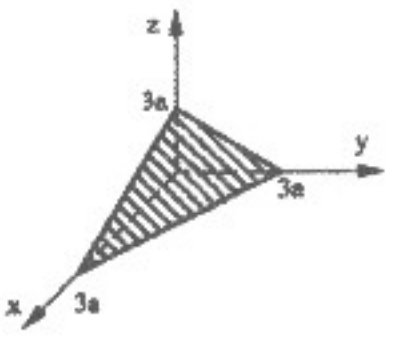
نقطه‌ای مانند (a,a,a) به رویه موردنظر تعلق دارد و نرمال بر سطح رویه در این نقطه عبارت است از:

$\vec{N} = a^2\vec{i} + a^2\vec{j} + a^2\vec{k}$

معادله صفحه مماس: $a^2(x-a)+a^2(y-a)+a^2(z-a)=0 \Rightarrow (x-a)+(y-a)+(z-a)=0 \Rightarrow x+y+z=3a$

بدیهی است از تقاطع صفحه فوق و صفحات مختصات هرمی مطابق شکل حاصل می‌شود و حجم این چهار وجهی عبارت است از:

$$V = \frac{1}{6}(3a)(3a)(3a) = \frac{9a^3}{2}$$



دیورژانس و کرل یک تابع برداری

تابع برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{f}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

دیورژانس و کرل این تابع بصورت زیر تعرف می‌شود:

$$\text{div}\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{curl}\ \vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

مثال: دیورژانس و کرل تابع برداری $\vec{f} = x^2\vec{i} + (z^2 - y)\vec{j} + xy\vec{k}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\text{div}\vec{f} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2-y)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 2x - 1 + 0$$

$$\text{div}\vec{f} = 2x - 1$$

$$\text{crl}\ \vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 - y & xy \end{vmatrix} = (x-2z)\vec{i} - (y-0)\vec{j} + (0+0)\vec{k} = (x-2z)\vec{i} - y\vec{j}$$

مثال: مقدار دیورژانس گرادیان تابع $f = e^{x+y+z}$ را در مبدا بدست آورید.

حل:

$$\text{grad } f = e^{x+y+z}\vec{i} + e^{x+y+z}\vec{j} + e^{x+y+z}\vec{k}$$
$$\text{div}(\nabla f) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} \xrightarrow{x=y=z=0} \text{div}(\nabla f) = 3$$

لاپلاسین یک تابع اسکالر

تابع $w = f(x,y,z)$ را در نظر بگیرید لاپلاسین این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

نکته: اگر لاپلاسین تابعی برابر با صفر شود $(\Delta w = 0)$ تابع همساز یا هارمونیک است.

مثال: لاپلاسین تابع $w = x^3y^2 + z^2y - x^2$ را پیدا کنید.

حل:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$
$$\Delta w = (6xy^2 - 2) + (2x^3) + (2y) \Rightarrow \Delta w = 6xy^2 + 2x^3 + 2y - 2$$

مثال: مقادیر b و a را طوری تعیین کنید تا $f(x,y,z) = x^3 + axy^2 + by^3 + z$ تابعی همساز باشد.

حل:

اگر تابع f همساز باشد داریم :

$$\Delta w = 0 \Rightarrow (6x) + (2ax + 6by) + 0 = 0$$
$$\Rightarrow (6 + 2a)x + 6by = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

مشتق سوئی (جهتی) یک تابع

برای محاسبه مشتق سوئی تابع $w = H(x,y,z)$ در یک جهت مشخص، اول بردار یکه جهت مورد نظر را بدست می‌آوریم و آن را با $\lambda_{\vec{u}}$ نمایش می دهیم، حال می‌توان نوشت:

مشتق سوئی در امتداد مورد نظر : $f'_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{u}}.\vec{\nabla}H$

نکته: با توجه به تعریف مشتق سوئی داریم :

$$\lambda_{\vec{u}}.\vec{\nabla}H = |\lambda_{\vec{u}}|.|\vec{\nabla}H|\cos\theta = |\vec{\nabla}H|\cos\theta$$

الف) مشتق سوئی زمانی بیشترین مقدار مثبت را دارد که $\cos\theta = 1$. (یعنی $\vec{\lambda}$ در جهت گرادیان f باشد)به تعبیری تابع f سریعترین افزایش را در جهت $\overrightarrow{\nabla f}$ خواهد داشت.

ب) مشتق سوئی زمانی بیشترین مقدار منفی را دارد که $\cos\theta = -1$. (یعنی $\vec{\lambda}$ در خلاف جهت گرادیان f باشد) به تعبیری تابع f سریعترین کاهش را در جت $-\overrightarrow{\nabla f}$ خواهد داشت.

ج) مشتق سوئی هنگامی صفر است که $\cos\theta = 0$ (یعنی $\vec{\lambda}$ **عمود بر جهت گرادیان** f باشد) به بیان دیگر مشتق سوئی تابع f در جهت بردار قائم بر $\vec{\nabla f}$ صفر خواهد بود.

مثال: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy$ در نقطه $\left(1,\frac{\pi}{2},-1\right)$ در جهت بردار $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ را بدست آورید.

حل:

$$\vec{\nabla} f = \left(z^2 - y\cos xy\right)\vec{i} + (-x\cos xy)\vec{j} + (2xz)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f_{\left(1,\frac{\pi}{2},-1\right)} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

بردارِیکه بردار داده شده عبارت است از :

$$\lambda_{\vec{u}} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

$$f'_{\vec{u}} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(\vec{i} - 2\vec{k}\right) = -1$$

مثال: بزرگترین مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ در نقطه $(1,1,1)$ را بدست آورید.

حل:

بیشترین مقدار مشتق سوئی برابر است با : $\left|\vec{\nabla} f\right|$

$$\vec{\nabla} f = \left(2xy^3z^4\right)\vec{i} + \left(3x^2y^2z^4\right)\vec{j} + \left(4x^2y^3z^3\right)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f_{(1,1,1)} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left|\vec{\nabla} f\right| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

مثال: دما در هر نقطه‌ای از محیط با رابطه $T(x,y,z) = x^2 - \sin y + 4\tan^{-1} z$ مشخص شده است اگر در نقطه ای با مختصات $(1,0,1)$ قرار داشته باشیم در چه جهتی باید حرکت کنیم تا بیشترین احساس خنکی حاصل شود؟

حل:

$$\vec{\nabla} T = 2x\vec{i} - \cos y\vec{j} + \frac{4}{1+z^2}\vec{k}$$

و در نقطه مذکور داریم :

$$\vec{\nabla}T = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

طبق تعریف مشتق سوئی، جهتی که T بیشترین کاهش را خواهد داشت، امتداد $-\vec{\nabla}T$ می‌باشد پس در جهت $(-2,1,-2)$ما بیشترین احساس خنکی را خواهیم کرد.

اکسترممهای نسبی در توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را در نظر بگیرید چنانچه عبارتهای $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه (x_0,y_0) همزمان صفر یا بی‌نهایت شود می‌گوییم (x_0,y_0) نقطه بحرانی تابع است.

- برای تعیین نوع نقطه بحرانی کافی است عبارتهای زیر را بدست آوریم:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} = A$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = B \qquad \Rightarrow \Delta = B^2 - AC$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} = C$$

۱) اگر $\Delta < 0$ و $A > 0$ باشد تابع z در (x_0,y_0) دارای min نسبی است.

۲) اگر $\Delta < 0$ و $A < 0$ باشد تابع z در (x_0,y_0) دارای max نسبی است.

۳) اگر $\Delta > 0$ باشد تابع z در (x_0,y_0) دارای اکسترمم نسبی نمی باشد. (اصطلاحاً دارای نقطه زینی است).

۴) اگر $\Delta = 0$ باشد این قضیه نوع نقطه بحرانی مذکور را مشخص نمی‌کند.

مثال: نقاط بحرانی و نوع این نقاط را در توابع زیر مشخص کنید.

الف) $z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$

حل:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 2y + 5 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0 \\ -2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \qquad \Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 4 - 4(2) = -4 < 0$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$$

پس تابع در نقطه $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ دارای می‌نیمم نسبی است.

ب) $z=e^{(x-1)^2+y^2+4y}$

حل:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2+4y}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=(2y+4)e^{(x-1)^2+y^2+4y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\2x+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{(x-1)^2+y^2+4y}+4(x-1)^2e^{(x-1)^2+y^2+4y}\xrightarrow{x=1,y=-2}A=2e^{-4}$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(x-1)(2y+4)e^{(x-1)^2+y^2+4y}\xrightarrow{x=1,y=-2}B=0$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2e^{(x-1)^2+y^2+4y}+(2y+4)^2e^{(x-1)^2+y^2+4y}\xrightarrow{x=1,y=-2}C=2e^{-4}$$

$$\Delta=B^2-AC=(0)^2-\left(2e^{-4}\right)^2=-4e^{-8}=\frac{-4}{e^8}<0$$

پس تابع در نقطه $(1,-2)$ دارای min نسبی است.

ج) $z=x^3+y^3-3xy$

حل:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3\quad\Rightarrow\quad\Delta=B^2-AC=9-36xy$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$$

در $x=y=0$ داریم: $\Delta=9>0$

در $x=y=1$ داریم: $\Delta=-27<0$

پس نقطه $(0,0)$ نقطه زینی و نقطه $(1,1)$ نقطه min نسبی تابع است.

د) $z=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-4x+y$

حل:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-4=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{y^2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x^2}=4\\ \frac{-1}{y^2}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{1}{2}\\ y=\pm1\end{cases}$$

لذا تابع چهار نقطه بحرانی $\left(\frac{1}{2},1\right)$ ، $\left(\frac{-1}{2},1\right)$ ، $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ، $\left(\frac{-1}{2},-1\right)$ دارد.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2}{x^3}$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\quad\Rightarrow\quad\Delta=-\frac{4}{x^3y^3}$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{+2}{y^3}$$

پس نقطه $\left(\frac{1}{2},1\right)$ زینی است.

پس نقطه $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ زینی است.

پس نقطه $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ min نسبی است.

پس نقطه $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ max نسبی است.

مثال: در تابع دو متغیره $z=\frac{2x+y-1}{x+2y}$ مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم آن را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(x+2y)-(2x+y-1)}{(x+2y)^2}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+2y)-2(2x+y-1)}{(x+2y)^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y+1=0\\ -3x+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{-1}{3}\\ x=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow x+y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

مثال: مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x,y)=ax^3+bxy^2+2y+1$ در نقطه $(1,2)$ دارای نقطه بحرانی شود و نوع نقطه بحرانی را نیز تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3ax^2+by^2=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2bxy+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a(1)^2+b(2)^2=0\\ 2b(1)(2)+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x$$

$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-y\xrightarrow{x=1,\,y=2}\begin{cases}A=4\\ B=-2\\ C=-1\end{cases}\longrightarrow\Delta=(-2)^2-(4)(-1)=8>0$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x$$

پس نقطه $(1,2)$ برای f نقطه زینی است.

اکسترمم های مشروط و قضیه لاگرانژ

فرض کنید هدف یافتن اکسترممهای تابع $z=f(x,y)$ باشرط $g(x,y)=0$ باشد برای این منظور تابع $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ که به تابع لاگرانژ موسوم است (λ را ضریب لاگرانژ می‌نامیم) را تشکیل داده و از حل دستگاه زیر مقدار λ و به دنبال آن مقادیر x و y ای که به اکسترمم شدن تابع z با شرط داده شده می‌انجامد را پیدا می کنیم.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

مثال : اکسترمم تابع $z=xy$ را با شرط $x+2y=6$ بیابید ونوع آن را تعیین کنید .

حل:

$$g(x,y)=x+2y-6$$

$$L=xy+\lambda(x+2y-6)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda=0\\ x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\lambda\\ x=-2\lambda\\ x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow -2\lambda-2\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=\frac{-3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

اکسترمم تابع : $z=3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

برای اینکه تعیین کنیم نوع اکسترمم حاصله چیست یک y و x دلخواه که شرط $x+2y=6$ را ارضاء کند در نظر گرفته و داخل z قرار می‌دهیم چنانچه عدد بدست آمده برای z از مقدار اکسترمم پیدا شده بیشتر بود نوع اکسترمم از جنس مـی‌نیمم و اگـر از مقـدار اکسـترمم کمتر بود از نوع ماکزیمم است.

در این مثال $y=0$ و $x=6$ شرط $x+2y=6$ را ارضاء می کند پس داریم :

$$z=6(2\times 0)=0<\frac{9}{2}$$

پس اکسترمم بدست آمده از نوع ماکزیمم است.

مثال: اکسترمم تابع $z=4-x^2-y^2$ با شرط $x+y=2$ را پیدا کنید.

حل:

$$x+y=2 \Rightarrow x=2-y$$
$$z=4-(2-y)^2-y^2=4-4+4y-y^2-y^2=4y-2y^2$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dy}=0 \Rightarrow 4-4y=0 \Rightarrow y=1\,,\ x=1$$

اکسترمم تابع $z=4-(1)^2-(1)^2 \Rightarrow z=2$

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $w=2z-xy-x^2-y^2$ با شرط $x+y+z=1$ را بدست آورید.

حل:

$$g(x,y,z)=x+y+z-1$$
$$L=2z-xy-x^2-y^2+\lambda(x+y+z-1)$$
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=-y-2x+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-x-2y+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2+\lambda=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}$$

از معادله سوم $\lambda=-2$ بدست می‌آید و داریم :

$$\begin{cases}-y-2x-2=0\\ -x-2y-2=0\\ x+y+z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-2}{3}\\ y=\frac{-2}{3}\\ z=\frac{7}{3}\end{cases}$$

با قرار دادن این مقادیر در w مقدار اکسترمم تابع بدست می‌آید:

$$w_{max} = \frac{10}{3}$$

مثال: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $z = 3x + 4x$ را باشرط $x^2 + y^2 = 1$ محاسبه کنید.

حل:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$
$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2\lambda} \\ y = \frac{-4}{2\lambda} \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{5} \\ y = \frac{-4}{5} \end{cases} \Rightarrow z = 3\left(\frac{-3}{5}\right) + 4\left(\frac{-4}{5}\right) \Rightarrow z = -5$$

$$\lambda = \frac{-5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow z = 3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow z = 5$$

پس $z_{max} = 5$ و $z_{min} = -5$ می‌باشد.

نکته: مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $z = ax + by$ با شرط $x^2 + y^2 = R^2 \ (R > 0)$ عبارتند از:

$$z_{max} = R\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$z_{min} = -R\sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال: تابع هزینه یک واحد صنعتی $C(x,y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800$ می‌باشد که در آن x,y به ترتیب میزان تولید کالاهای a,b است. برای تولید جمعاً 39 واحد کالای a,b ، حداقل هزینه در چه سطحی از تولید حاصل می‌شود؟

حل:

بدیهی است که هدف می‌نیمم کردن تابع هزینه داده شده باشرط $x + y = 39$ می‌باشد پس تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x,y) = x + y - 39 = 0$$
$$L = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800 + \lambda(x + y - 39)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=10x+2y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2x+6y+\lambda=0\end{cases}\Rightarrow 8x-4y=0\ \Rightarrow\ y=2x$$

$$x+y=39\ \Rightarrow\ x+2x=39\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=13\\ y=26\end{cases}$$

$$C_{min}=5(13)^2+2(13)(26)+3(26)^2+800\ \Rightarrow\ C_{min}=4349$$

انتگرال دوگانه :

الف) محاسبه انتگرال دوگانه وقتی حدود انتگرالها داده شده است:

فرض کنید هدف محاسبه انتگرال دوگانه‌ای بصورت زیر باشد:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=P(x)}^{y=Q(x)} f(x,y)\,dydx$$

برای این منظور نخست تابع اولیه را نسبت به متغیر y پیدا کرده (البته در حین انجام کار x را ثابت فرض می‌کنیم) سپس در این تابع اولیه حدود y را با توجه به حدود انتگرال داخلی قرار داده و به این ترتیب مسئله ما تبدیل به انتگرال معین یگانه شده و آن را حل می‌کنیم.

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را بیابید.

الف) $I=\int_0^1\int_0^y\left(x^2+y^3\right)dxdy$

حل:

$$I=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+y^3x\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^1\left(\frac{y^3}{3}+y^4\right)dy=\left[\frac{y^4}{12}+\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{12}+\frac{1}{5}=\frac{17}{60}$$

ب) $I=\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} ydxdy$

حل:

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{-2}^{2}\frac{4-x^2}{2}dx=\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=\left(4-\frac{8}{6}\right)-\left(-4+\frac{8}{6}\right)=8+\frac{16}{6}=\frac{32}{3}$$

ج) $I=\int_0^1\int_0^1 e^{2y-x}dxdy$

حل:

$$I=\int_0^1\left[-e^{2y-x}\right]_0^1 dy=\int_0^1\left(-e^{2y-1}+e^{2y}\right)dy=\left[\frac{-1}{2}e^{2y-1}+\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^2\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$I=\frac{1}{2}e^2-\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$$

د) $I=\int_1^2\int_0^x\frac{dxdy}{(x+y)^2}$

حل:

$$I=\int_1^2\left[\frac{-1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_1^2\left(\frac{-1}{2x}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}Lnx+Lnx\right]_1^2=\left[\frac{1}{2}Lnx\right]_1^2=\frac{1}{2}Ln2-\frac{1}{2}Ln1=\frac{1}{2}Ln2$$

م) $I=\int_1^2\int_0^x\frac{dydx}{x^2+y^2}$

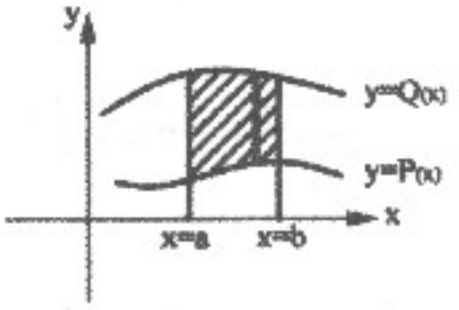
حل:

$$I=\int_1^2\left[\frac{1}{x}Arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)dx=\left[\frac{\pi}{4}Lnx\right]_1^2=\frac{\pi}{4}(Ln2-Ln1)=\frac{\pi}{4}Ln2$$

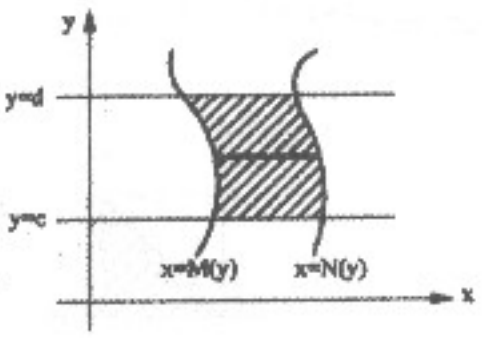
ب) محاسبه انتگرال دوگانه وقتی ناحیه انتگرال گیری داده شده است:

فرض کنید هدف محاسبه انتگرال دوگانه‌ای به صورت $I=\int\int_D f(x,y)dxdy$ باشد که در آن D ناحیه مشخص شده در صفحه است، طبیعی است مشکل اساسی در چنین مسائلی آن است که نخست با توجه به ناحیه D تعیین شده حدود انتگرالها را قرار داده و مانند مسائل قبل به حل آن می‌پردازیم.

- با توجه به وضعیت D یکی از دو شکل زیر می‌تواند مفید باشد.



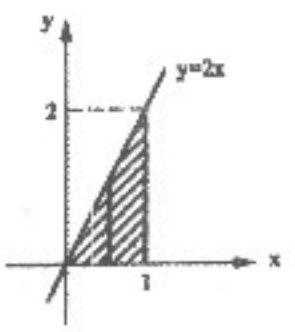
$$I=\int_a^b\int_{P(x)}^{Q(x)}f(x,y)dydx$$



$$I=\int_c^d\int_{M(y)}^{N(y)}f(x,y)dxdy$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int\int_D xy^2dydx$ که در آن D ناحیه محدود شده به خطوط $y=2x$ ، $x=1$ و $y=0$ می‌باشد را بیابید.

حل:



$$I=\int_0^1\int_0^{2x} xy^2dydx$$

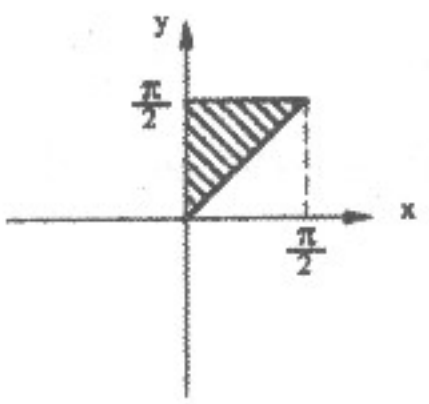
$$I=\int_0^1\left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2x}dx=\int_0^1\frac{x}{3}(2x)^3dx=\int_0^1\frac{8x^4}{3}dx$$

$$I=\left[\frac{8x^5}{15}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

مثال: مقدار انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dydx$ را بدست آورید.

حل:

از آنجا که محاسبه تابع اول عبارت $\frac{\sin y}{y}$ نسبت به متغیر y امکان پذیر نمی‌باشد نخست با توجه به حدود انتگرال داده شده میدان را ترسیم کرده و سپس ترتیب انتگرالگیری را تغییر می‌دهیم.



$$D:\begin{cases}y=x\ ,\ x=0\\ y=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

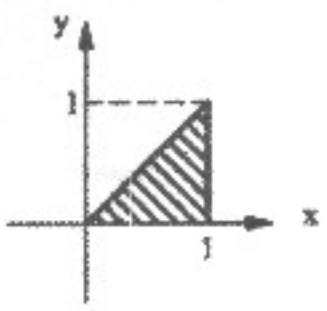
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dxdy$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin y}{y}.x\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

مثال: حاصل $\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dxdy$ را بدست آورید.

حل:

چون انتگرال $e^{\frac{y}{x}}$ نست به متغیر x قابل محاسبه نسبت پس باید ترتیب انتگرال گیری را عوض کرده و بعد به محاسبه آن بپردازیم .



$$\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dxdy=\int_0^1\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dydx$$

$$I=\int_0^1\left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1(xe-x)dx=\left[\frac{x^2}{2}e-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\Rightarrow I=\frac{e-1}{2}$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_0^{\pi}\int_0^{z}\int_0^{y}\sin(x+y+z)\,dxdydz$ را محاسبه کنید.

حل:

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{z}\Big[-\cos(x+y+z)\Big]_{x=0}^{x=y}dydz=\int_0^{\pi}\int_0^{z}\big(\cos(y+z)-\cos(2y+z)\big)dydz$$

$$I=\int_0^{\pi}\Big[\sin(y+z)-\frac{1}{2}\sin(2y+z)\Big]_{y=0}^{y=z}dz$$

$$I=\int_0^{\pi}\Big(\sin 2z-\sin z-\frac{1}{2}\sin(3z)+\frac{1}{2}\sin z\Big)dz$$

$$I=\int_0^{\pi}\Big(\sin(2z)-\frac{1}{2}\sin(3z)-\frac{1}{2}\sin z\Big)dz=\Big[\frac{-1}{2}\cos 2z+\frac{1}{6}\cos 3z+\frac{1}{2}\cos z\Big]_0^{\pi}$$

$$I=-\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{6}(-1)+\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{-4}{3}$$

« معادلات دیفرانسیل»

یک معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین تابع و مشتقات تابع و متغیر مستقل است که بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را اصطلاحاً مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌گویند، یک معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گوییم هرگاه بتوان آن را به گونه‌ای نوشت که شامل هیچ جمله غیر خطی از تابع و مشتقات آن نباشد و یک معادله دیفرانسیل خطی را همگن می‌گوییم هرگاه تمام جملات آن شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد.

معادله جبری است نه معادله دیفرانسیل زیرا در آن مشتقات تابع وجود ندارد $\longrightarrow$ $x^2 + y^3 - x\cos y = 4$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو، غیر خطی و غیر همگن $\longrightarrow$ $x^3y'' + y'^7 - 6x = 1$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو، خطی و غیر همگن $\longrightarrow$ $x^3y'' - 4\cos x.y' + yx - x^2 = 0$

معادله دیفرانسیل مرتبه سوم، غیر خطی ، همگن $\longrightarrow$ $x\cos y''' - 4x^7y^2 = y^3$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام در جواب عمومی (کلی) خود می‌تواند شامل n ثابت اختیاری (پارامتر) باشد و به تعبیر برعکس هر دسته منحنی شامل n ثابت اختیاری را می‌توان جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام دانست که برای یافتن این معادله دیفرانسیل کافی است بین معادله دسته منحنی ، مشتق اول، مشتق دوم و ..... و مشتق مرتبه nام آن، پارامترهای مذکور را حذف کنیم.

مثال: معادله دیفرانسیل دسته توابع $y = Ax^2 - x$ را بیابید .

حل:

چون دسته توابع داده شده شامل یک پارامتر A است لذا معادله دیفرانسیل آن باید مرتبه اول باشد، لذا می نویسیم:

$$\begin{cases} y = Ax^2 - x \\ y' = 2Ax - 1 \Rightarrow y' + 1 = 2Ax \Rightarrow A = \dfrac{y' + 1}{2x} \end{cases}$$

با قرار دادن در معادله اول داریم:

$$y = \frac{y' + 1}{2x}\left(x^2\right) - x \Rightarrow y = \frac{x}{2}(y' + 1) - x \Rightarrow 2y = xy' + x - 2x \Rightarrow xy' - x = 2y \Rightarrow xy' - 2y - x = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت C در معادله $y = C\sin x + \cos x$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} y = C\sin x + \cos x \Rightarrow y - \cos x = C\sin x \\ y' = C\cos x - \sin x \Rightarrow y' + \sin x = C\cos x \end{cases}$$

از تقسیم دو رابطه فوق داریم:

$$\frac{y-\cos x}{y'+\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow y\cos x-\cos^2 x=y'\sin x+\sin^2 x\ \Rightarrow\ y'\sin x-y\cos x+1=0$$

مثال: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابتهای A,B در دسته توابع $y=Ae^{2x}+Be^{-x}$ را پیدا کنید.

حل:

چون دسته توابع داده شده شامل دوپارامتر B و A است، لذا معادله دیفرانسیل مورد نظر باید مرتبه دوم باشد، پس می‌نویسیم:

$$y=Ae^{2x}+Be^{-x}$$
$$y'=2Ae^{2x}-Be^{-x}$$
$$y''=4Ae^{2x}+Be^{-x}$$

از معادلات دوم و سوم داریم :

$$y'+y''=6Ae^{2x}\ \Rightarrow\ \frac{y'+y''}{6}=Ae^{2x}$$
$$y''-2y'=3Be^{-x}\Rightarrow\frac{y''-2y'}{3}=Be^{-x}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله اول داریم:

$$y=\frac{y'+y''}{6}+\frac{y''-2y'}{3}\ \Rightarrow\ 6y=y'+y''+2y''-4y'\ \Rightarrow 3y''-3y'-6y=0\Rightarrow y''-y'-2y=0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر:

اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان بفرم $A(x)dx=B(y)dy$ نوشت ، معادله را از نوع جدایی پذیر گفته و باانتگرال گیری از طرفین این رابطه می‌توان جواب عمومی را بدست آورد.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

الف) $xy'=(y-3)$

حل:

$$x\frac{dy}{dx}=(y-3)\Rightarrow xdy=(y-3)dx\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y-3}=\frac{dx}{x}\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}\ln(y-3)=\ln(x)+C$$

می‌توان فرض کرد که: $C=\ln k$ پس داریم:

$$\ln(y-3)=\ln(x)+\ln k\ \Rightarrow\ \ln(y-3)=\ln kx\Rightarrow y-3=kx\ \Rightarrow\ y=kx+3$$

ب) $y'=e^{2x+y-1}-2$

حل:

با تغییر متغیر $2x+y-1=u$ داریم $u'=2+y'$

$$u'-2=e^{u}-2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=e^{u} \Rightarrow \int dx=\int e^{-u}du \Rightarrow x=-e^{-u}+C \Rightarrow x=-e^{-(2x+y-1)}+C \Rightarrow x+e^{-2x-y+1}=C$$

ج) $\left(x+xy^{2}\right)dx+\left(y+x^{2}y\right)dy=0$

حل:

$$x\left(1+y^{2}\right)dx+y\left(1+x^{2}\right)dy=0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^{2}}dx=\frac{-y}{1+y^{2}}dy \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{-2y}{1+y^{2}}\right)dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Ln\left(1+x^{2}\right)=\frac{-1}{2}Ln\left(1+y^{2}\right)+C \Rightarrow \frac{1}{2}\left(Ln\left(1+x^{2}\right)+Ln\left(1+y^{2}\right)\right)=C$$

$$\Rightarrow Ln\left(\left(1+x^{2}\right)\left(1+y^{2}\right)\right)=2C$$

با فرض $2C=Lnk$ داریم.

$$Ln\left(\left(1+x^{2}\right)\left(1+y^{2}\right)\right)=Lnk \Rightarrow \left(1+x^{2}\right)\left(1+y^{2}\right)=k$$

د) $yy'=\frac{y^{2}-1}{x^{2}+1}$

حل:

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{y^{2}-1}{x^{2}+1} \Rightarrow \frac{ydy}{y^{2}-1}=\frac{dx}{x^{2}+1} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2ydy}{y^{2}-1}\right)=\frac{dx}{x^{2}+1} \Rightarrow \frac{1}{2}Ln\left(y^{2}-1\right)=\text{Arc}\tan x+C$$

م) $y'+e^{x}y=e^{x}y^{2}$

حل:

$$\frac{dy}{dx}+e^{x}y=e^{x}y^{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{x}\left(y^{2}-y\right) \Rightarrow \frac{dy}{y^{2}-y}=e^{x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y(y-1)}=e^{x}dx \Rightarrow \frac{y-(y-1)}{y(y-1)}dy=e^{x}dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)dy=e^{x}dx \Rightarrow Ln(y-1)-Ln(y)=e^{x}+C \Rightarrow Ln\left(\frac{y-1}{y}\right)=e^{x}+C$$

ن) $y-Lny'=0$

حل:

$$y = Ln\left(\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow e^{y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = e^{-y}dy \Rightarrow x + C = -e^{-y} \Rightarrow x + e^{-y} = -C \text{ یا } x + e^{-y} = k$$

مثال: معادله منحنی که ازنقطه $M(0,0)$ می‌گذرد و شیب آن $y' = \frac{2-x}{y}$ باشد کدام است؟

حل :

$$y' = \frac{2-x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y} \Rightarrow ydy = (2-x)dx$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\frac{y^2}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2 = 4x - x^2 + 2C$$

و چون منحنی از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد پس باید:

$$(0)^2 = 4(0) - (0)^2 + 2C \Rightarrow C = 0$$

پس معادله منحنی مورد نظر چنین است:

$$y^2 = 4x - x^2$$

مثال: اگر شیب خط مماس در هر نقطه از یک منحنی نسبت طول به عرض آن نقطه باشد منحنی مذکور چه مقطع مخروطی خواهد بود؟

حل:

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$\Rightarrow y^2 = x^2 + 2C \Rightarrow y^2 - x^2 = 2C \Rightarrow$ مقطع فوق هذلولی می‌باشد

مثال : آهنگ افزایش جمعیت متناسب با جمعیت است، اگر جمعیت یک شهر در سال 1340 ، 40000 نفر و در سال 1370، 60000 نفر باشد در سال 1400 جمعتی این شهر چند نفر است؟

حل:

آهنگ افزایش جمعیت چون متناب با خود جمعیت است پس داریم:

$$\frac{dN}{dt} \sim N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow Ln(N) = kt + C \Rightarrow N(t) = e^{kt+C} = e^{kt}.e^{C}$$

فرض می کنیم که $e^C = P$ پس داریم :

$$N(t) = Pe^{kt}$$

اگر سال 1340 را مبنا در نظر بگیریم داریم :

$$N(0) = 40000 \Rightarrow P = 40000$$

$$N(30) = 60000 \Rightarrow 40000e^{30k} = 60000 \Rightarrow k\frac{Ln\left(\frac{3}{2}\right)}{30}$$

بنابراین داریم:

$$N(t) = 40000e^{\frac{Ln\left(\frac{3}{2}\right)}{30}t} \Rightarrow N(60) = 40000\, e^{2Ln\left(\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow N(60) = 90000$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل

در معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد می گوییم معادله دیفرانسیل از نوع کامل است.

اگر معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل باشد جواب عمومی آن به فرم $u(x,y) = C$ می‌باشد که در آن $u(x,y)$ را باید طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)\end{cases}$$

مثال: اگر معادله دیفرانسیل $2axy^3dx + bx^2y^2dy = 0$ کامل باشد رابطه بین b و a کدام است؟

حل:

$$\begin{cases}P(x,y) = 2axy^3\\ Q(x,y) = bx^2y^2\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 6axy^2 = 2bxy^2 \Rightarrow 6a = 2b \Rightarrow 3a = b$$

مثال: مقادیر a,b را طوری تعیین کنید که معادله دیفرانسیل زیر کامل باشد.

$$\left(ax^2y^2 + e^{2y}\right)dx + \left(x^3y + 2xe^{2y} + bx^2\right)dy = 0$$

حل:

$$2ax^2y + 2e^{2y} = 3x^2y + 2e^{2y} + 2bx \Rightarrow \begin{cases}2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}\\ b = 0\end{cases}$$

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

الف) $\left(3x^2+2xy\right)dx+\left(x^2-2y\right)dy=0$

حل:

معادله از نوع کامل است زیرا:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

لذا برای یافتن $u(x,y)=C$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=P\\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2xy \xrightarrow{\text{انتگرالگیری نسبت به x}} u=x^3+x^2y+f(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2y \xrightarrow{\text{انتگرالگیری نسبت به y}} u=x^2y-y^2+h(x)\end{cases}$$

حال با استفاده از اجتماع جوابهای معادلات فوق داریم:

$$u=x^3+x^2y-y^2 \Rightarrow x^3+x^2y-y^2=C$$

ب) $y'=\frac{3x^2-y^3}{3xy^2}$

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^3}{3xy^2} \Rightarrow 3xy^2dy=\left(3x^2-y^3\right)dx \Rightarrow \left(3x^2-y^3\right)dx-3xy^2dy=0$$

معادله فوق کامل است پس داریم :

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=P\\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^3 \xrightarrow{\text{انتگرالگیری نسبت به x}} u=x^3-xy^3+f(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3xy^2 \xrightarrow{\text{انتگرالگیری نسبت به y}} u=-xy^3+h(x)\end{cases}$$

پس داریم :

$$u=x^3-xy^3 \Rightarrow x^3-xy^3=C$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن :

تابع $f(x,y)$ را تابعی همگن از مرتبه α می‌گویند هرگاه داشته باشیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}f(x,y)$$

معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را در نظر بگیرید، چنانچه توابع Q و P توابعی همگن از یک درجه باشند اصطلاحاً می گوییم معادله مورد نظر از نوع همگن بوده و می‌توان نشان داد با جانشینی $u(x)=\frac{y}{x}$ معادله همگن مورد نظر به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل می‌شود.

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف) $xyy'=x^2-y^2$

حل:

$$xyy'=x^2-y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx}=x^2-y^2 \Rightarrow xydy=\left(x^2-y^2\right)dx \Rightarrow \left(x^2-y^2\right)dx-xydy=0$$

معادله فوق همگن از درجه $\alpha=2$ است.

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+xu'$$

پس داریم :

$$x(ux)(u+xu')=x^2-(ux)^2 \Rightarrow u^2x^2+ux^3u'=x^2-u^2x^2 \Rightarrow 2u^2x^2+x^3uu'=x^2$$

$$\Rightarrow 2u^2x^2+ux^3\frac{du}{dx}=x^2 \Rightarrow ux^3\frac{du}{dx}=x^2-2ux^2 \Rightarrow ux^3du=x^2\left(1-2u^2\right)dx \Rightarrow \frac{udu}{1-2u^2}=\frac{x^2dx}{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{udu}{1-2u^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{4}Ln\left(1-2u^2\right)=Lnx+C$$

با فرض $Lnk=C$ و $u=\frac{y}{x}$ داریم:

$$Ln\left(1-2u^2\right)=-4Lnx-4Lnk \Rightarrow Ln\left(1-2u^2\right)=-4Ln(xk) \Rightarrow 1-2u^2=\frac{1}{k^4x^4} \Rightarrow 1-2\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{k^4x^4} \Rightarrow x^4-2x^2y^2=\frac{1}{k^4}$$

ب) $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$

حل:

معادله همگن از درجه $\alpha=2$ است.

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+xu'$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل اصلی داریم :

$$\left(x^2+u^2x^2\right)dx-2x(ux)dy=0 \Rightarrow x^2\left(1+u^2\right)dx=2ux^2dy \Rightarrow \left(u^2+1\right)x^2=2ux^2y' \Rightarrow \left(1+u^2\right)x^2=2ux^2(u+xu')$$

$$\Rightarrow \left(1+u^2\right)x^2=2u^2x^2+2ux^3u' \Rightarrow \left(1+u^2\right)x^2-2u^2x^2=2ux^3\frac{du}{dx} \Rightarrow x^2\left(1-u^2\right)dx=2ux^3du$$

$$\Rightarrow \frac{x^2dx}{x^3}=\frac{2u}{1-u^2}du \Rightarrow Lnx=-Ln\left(1-u^2\right)+C$$

با فرض $C = \text{Ln}\, k$ داریم :

$$\text{Ln}x = \text{Ln}\left(\frac{1}{1-u^2}\right) + \text{Ln}\, k \Rightarrow x = \frac{k}{1-u^2} \Rightarrow x - xu^2 = k$$

با جایگذاری $u = \frac{y}{x}$ داریم :

$$x - x\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = k \Rightarrow x - \frac{y^2}{x} = k \Rightarrow x^2 - y^2 = kx$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(1)\ y' + P(x)y = Q(x)$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}.$$

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

الف) $y - 3y = e^{2x}$

حل:

$$P(x) = -3\ ,\ Q(x) = e^{2x}$$

$$y(x) = e^{-\int -3dx}.\left\{\int e^{2x}.e^{\int -3dx}dx + C\right\}$$

$$= e^{3x}.\left\{\int e^{2x}.e^{-3x}dx + C\right\} = e^{3x}.\left\{\int e^{-x}dx + C\right\} = e^{3x}.\left\{-e^{-x} + C\right\} = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

ب) $y' + y\tan x = \cos^3 x$

حل:

$$P(x) = \tan x\ ,\ Q(x) = \cos^3 x$$

$$y(x) = e^{-\int \tan x\,dx}\left\{\int \cos^3 x.e^{\int \tan x\,dx}dx + C\right\}$$

$$y(x) = e^{\text{Ln}(\cos x)}\left\{\int \cos^3 .e^{-\text{Ln}(\cos x)}dx + C\right\}$$

$$y(x) = \cos x\left\{\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx + C\right\} = \cos x\left\{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right\}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x\cos x + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

ج) $\frac{y'}{y}+\frac{1}{x}\text{Ln}\,y=3x$

حل:

باتغییر متغیر $\text{Ln}y=u(x)$ داریم : $\frac{y'}{y}=u'(x)$

پس معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$u'+\frac{1}{x}u=3x$$

که یک معادله مرتبه اول خطی است پس داریم :

$$P(x)=\frac{1}{x},\ Q(x)=3x$$

$$u(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}.\left\{\int 3xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right\}$$

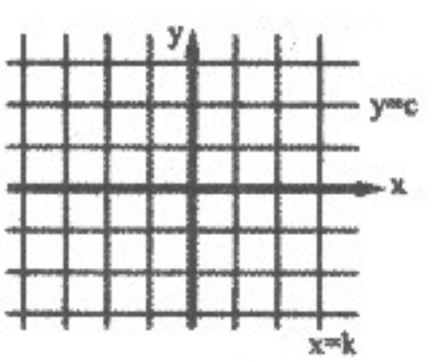
$$u(x)=e^{-\text{Ln}x}\left\{\int 3x.e^{\text{Ln}x}dx+c\right\}=\frac{1}{x}\left\{\int 3x.x\,dx+C\right\}$$

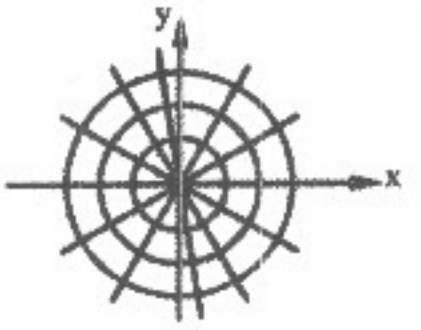
$$u(x)=\frac{1}{x}\left\{\int 3x^2dx+c\right\}=\frac{1}{x}\left(x^3+c\right)=x^2+\frac{c}{x}\Rightarrow \text{Ln}y=x^2+\frac{c}{x}$$

مسیرهای قائم یک دسته منحنی

مسیرهای قائم یک دسته منحنی، منحنیهایی هستند که هر کدام از آنها بر منحنیهای آن دسته منحنی عمود است.

به عنوان مثال دسته منحنیهای $x=k$ و $y=c$ و نیز دسته منحنیهای $y=mx$ و $x^2+y^2=R^2$ مسیرهای قائم همدیگرند و این موضوع در شکلهای زیر دیده می‌شود:





روش یافتن مسیرهای قائم یک دسته منحنی :

فرض کنید معادله یک دسته منحنی بصورت $f(x,y,c)=0$ باشد که در آن c یک پارامتر است و به ازای هر مقدار c یک منحنی ایجاد می شود.

برای یافتن معادله مسیرهای قائم این دسته منحنی ها نخست از رابطه داده شده نسبت به x مشتق گرفته و بین رابطه حاصله و رابطه اصلی، پارامتر c را حذف می کنیم، به معادله دیفرانسیل حاصله معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی می گویند، اگر در این معادله y' را به $\frac{-1}{y'}$ تبدیل کنیم، معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم پیدا می‌شود و با حل این معادله دیفرانسیل، معادله مسیرهای قائم دسته منحنیهای اولیه حاصل خواهد شد.

مثال : معادله مسیرهای قائم دسته منحنیهای زیر را بیابید.

الف) $y^2 - cx = 0$

حل:

$$y^2 = cx \longrightarrow 2yy' = c$$

$$y^2 = 2yy'x \Rightarrow \frac{2y'}{y}x = 1 \xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}} \frac{2}{y}\left(\frac{-1}{y'}\right)x = 1 \Rightarrow \frac{-2x}{y} = y' \Rightarrow -2xdx = ydy \Rightarrow -x^2 + c = \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + x^2 = c \Rightarrow y^2 + 2x^2 = 2c$$

ب) $(x+1)(y+1) = C$

حل:

$$(x+1)(y+1) = c \xrightarrow{\text{مشتق}} (y+1) + y'(1+x) = 0 \Rightarrow 1 + y = -y'(1+x) \Rightarrow \frac{1+y}{1+x} = -y' \xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}}$$

$$\frac{1+y}{1+x} = \frac{1}{y'} \Rightarrow (1+y)dy = (1+x)dx \Rightarrow y + \frac{y^2}{2} = x + \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2y + y^2 = 2x + x^2 + 2c$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - 1 = (x+1)^2 - 1 + 2c \Rightarrow (y+1)^2 - (x+1)^2 = 2c$$

ج) $x^2 - y^2 = c$

حل:

$$x^2 - y^2 = c \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow x = yy' \Rightarrow \frac{x}{y} = y' \xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}} \frac{x}{y} = \frac{-1}{y'} \Rightarrow xdy = -ydx$$

$$\Rightarrow \frac{-dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -Lny = Lnx + c \Rightarrow Ln\left(\frac{1}{y}\right) = Lnx + c \Rightarrow \frac{1}{y} = e^{(Lnx+c)} \Rightarrow \frac{1}{y} = x.e^{c} \Rightarrow xy = \frac{1}{e^{c}} = e^{-c}$$

چون e^{-c} عددی است که بستگی به پارامتر c داشته می‌توان فرض کرد که $e^{-c} = k$:

$$xy = k$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت :

فرض کنید a,b,c اعداد ثابت حقیقی باشند، برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = 0$ ، نخست معادله‌ای بصورت $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ تشکیل می‌دهیم که این معادله را اصطلاحاً معادله مشخصه می‌گویند، پس از حل معادله مشخصه می‌توان از بحثهای زیر جهت یافتن جواب معادله دیفرانسیل کمک گرفت:

الف) اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی λ_2 و λ_1 باشد، جواب عمومی چنین است:

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

ب) اگر معادله مشخصه دارای یک ریشه حقیقی مضاعف λ_1 باشد، جواب عمومی چنین است:

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$$

ج) اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ جواب عمومی چنین است:

$$y = Ae^{Px}\sin qx + Be^{Px}\cos qx$$

توجه: بحث فوق برای معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت دارای مراتب بالاتر نیز قابل تعمیم است یعنی در اینجا نیز باید معادله مشخصه را بطور مقتضی تشکیل داد و تمام ریشه‌های آن رابیابیم و از آنجا جواب عمومی را گزارش کنیم.

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

الف) $y'' = 9y$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$

جواب عمومی : $y = Ae^{3x} + Be^{-x}$

ب) $y'' + 3y' - 4y = 0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -4 \end{cases}$

جواب عمومی : $y = Ae^{x} + Be^{-4x}$

ج) $4y'' + 4y' + 1 = 0$

حل:

معادله مشخصه : $4\lambda^2+4\lambda+1=0 \Rightarrow (2\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\frac{-1}{2}$

جواب عمومی : $y=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Bxe^{-\frac{1}{2}x}$

د) $y''+2y'+2y=0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i$

جواب عمومی : $y=Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x$

م) $y'''+4y''=0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^3+4\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=-4\end{cases}$

جواب عمومی : $y=Ae^{0x}+Bxe^{0x}+Ce^{-4x}=A+Bx+Ce^{-4x}$

ن) $y'''-8y=0$

حل:

$\lambda^3-8=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-1\pm\sqrt{3}i\end{cases}$

جواب عمومی : $y=Ae^{2x}+Be^{-x}\cos\sqrt{3}x+Ce^{-x}\sin\sqrt{3}x$

و) $y^{(4)}-81y=0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^4-81=0 \Rightarrow (\lambda^2-9)(\lambda^2+9)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda^2-9=0 \Rightarrow \lambda=\pm3\\ \lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm3i\end{cases}$

جواب عمومی : $y=Ae^{3x}+Be^{-3x}+Ce^{0x}\cos 3x+De^{0x}\sin 3x=Ae^{3x}+Be^{-3x}+C\cos 3x+D\sin 3x$

هـ) $y^{(5)}+3y^{(4)}+2y'''=0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^5+3\lambda^4+2\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda^3\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda+2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\\ \lambda_4=-1\\ \lambda_5=-2\end{cases}$

جواب عمومی : $y=Ae^{0x}+Bxe^{0x}+Cx^2e^{0x}+De^{-x}+e^{-2x}=A+Bx+Cx^2+De^{-x}+Ee^{-2x}$

مثال: به ازای چه مقدار a معادله دیفرانسیل $y''+4ay'+18=0$ جواب همگن نوسانی خواهد داشت؟

حل:

معادله مشخصه : $\lambda^2+4a\lambda+18=0$

برای داشتن جواب همگن نوسانی کافی است ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشد یعنی $\Delta<0$ پس داریم :

$$(4a)^2-4(1)(18)<0 \Rightarrow 16a^2-72<0 \Rightarrow a^2<\frac{72}{16} \Rightarrow |a|<\frac{6\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2}<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کوشی اویلر

یک معادله دیفرانسیل کوشی مرتبه دو بصورت : $ax^2y''+bxy'+cy=0$ می‌باشد که در آن c و b و a اعداد ثابت حقیقی فرض شده‌اند.

می توان نشان داد با تغییر متغیر $x=e^u$ یا $u=Lnx$ ، معادله کوشی مذکور به یک معادله مرتبه دو با ضرایب ثابت برای $y(u)$ تبدیل می‌شود .

برای پیداکردن جواب این معادله کوشی بصورت مستقیم کافی است معادله مشخصه‌ای بصورت $a\lambda(\lambda-1)+b\lambda+c=0$ تشکیل دهیم و پس از حل آن از یکی از سه بحث زیر استفاده کنیم:

الف) اگر معادله مشخصه دو ریشه حقیقی λ_2 و λ_1 داشته باشد داریم :

$$y=Ax^{\lambda_1}+Bx^{\lambda_2}$$

ب) اگر معادله مشخصه یک ریشه حقیقی مضاعف λ_1 داشته باشد داریم :

$$y=Ax^{\lambda_1}+Bx^{\lambda_1}.Ln\,x$$

ج) اگر معادله مشخصه دو ریشه موهومی مختلط $p\pm qi$ داشته باشد داریم :

$$y=Ax^{P}\cos(qLn\,x)+Bx^{P}\sin(qLn\,x)$$

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

الف) $x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = 0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda(\lambda-1) + 2\lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-1}{2}$

جواب عمومی : $y = Ax^{-\frac{1}{2}} + Bx^{-\frac{1}{2}}Lnx = \frac{A}{\sqrt{x}} + \frac{B\,Ln\,x}{\sqrt{x}}$

ب) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

حل:

معادله مشخصه : $\lambda(\lambda-1) + 3\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$

جواب عمومی : $y = Ax^{-1}\cos(2Lnx) + Bx^{-1}\sin(2Lnx) = \frac{A}{x}\cos(2Lnx) + \frac{B}{x}\sin(2Ln\,x)$

ج) $2x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$

حل:

معادله مشخصه : $2\lambda(\lambda-1) - 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 3\end{cases}$

جواب عمومی : $y = Ax + Bx^3$

معادلات دیفرانسیل باضرایب ثابت همراه با طرف ثانی (غیر همگن)

فرض کنید بخواهیم جواب کلی معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = f(x)$ که در آن c و b و a اعداد ثابت حقیقی و $f(x)$ تابعی معلوم است را بیابیم، برای این منظور نخست فرض می کنیم در طرف ثانی اصولاً $f(x)$ ای وجود نداشته (اصطلاحاً معادله همگن را در نظر می گیریم) و جواب عمومی معادله $ay'' + by' + cy = 0$ را پیدا کنیم.

سپس باید به طریقی یک جواب برای کل معادله $ay'' + by' + cy = f(x)$ پیدا کنیم، این جواب اصطلاحاً جواب خصوصی معادله غیر همگن نامیده می‌شود، اگر چه برای یافتن جواب خصوصی روشهای مختلفی وجود دارد ولی می‌توان با توجه به گزینه‌های پیشنهادی در تست ساختار کلی جواب خصوصی را پیدا کرد و با قرار دادن آن در معادله غیر همگن مورد نظر تکلیف آن را مشخص نمود.

حال می‌توان گفت:

y (جواب عمومی) $= y_h + y_P$

y_h: جواب عمومی معادله همگن

y_P: جواب خصوصی معادله غیر همگن

مثال: پاسخ معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 4y = x^2$ کدام است؟

الف) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

ب) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$

ج) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \cos 2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

د) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

حل:

ابتدا معادله همگن متناظر با آن یعنی $y'' - 4y' + 4y = 0$ را حل می‌کنیم تا جوابهای عمومی معادله همگن بدست آید.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

پس پایه های جواب معادله همگن بصورت زیر است:

$$y_h = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

پس یا گزینه 2 صحیح است یا گزینه 1 . از طرفی چون طرف ثانی معادله x^2 می‌باشد پس جواب خصوصی مورد نظر به فرم $y_P = ax^2 + bx + c$ بوده و باید در کل معادله فوق صدق کند پس داریم:

$$\begin{cases} y'_P = 2ax + b \\ y''_P = 2a \end{cases}$$

$$2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 \Rightarrow 2a - 8ax - 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2$$

$$\Rightarrow 4ax^2 + x(4b - 8a) + 4c - 4b + 2a = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 4b - 8a = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ 4c - 4b + 2a = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{8} \end{cases}$$

پس جواب خصوصی $y_P = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$ می‌باشد و در کل داریم:

y (جواب عمومی) $= y_h + y_P = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$

پس گزینه 2 صحیح می‌باشد.

مثال: اگر جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+2y'-3y=x^2-1$ دارای ساختار $y=Ax^2+Bx+C$ باشد، جواب عمومی را بیابید.

حل:

ابتدا جواب معادله همگن متناظر را بدست می‌آوریم:

$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-3\end{cases} \Rightarrow y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$$

$$\begin{cases}y_p=Ax^2+Bx+C\\ y_p'=2Ax+B\\ y_p''=2A\end{cases}$$

$$2A+2(2Ax+B)-3(Ax^2+Bx+C)=x^2-1 \Rightarrow 2A+4Ax+2B-3Ax^2-3Bx-3C=x^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3Ax^2+x(4A-3B)+(2A+2B-3C)=x^2-1$$

$$\begin{cases}-3A=1 \Rightarrow A=\dfrac{-1}{3}\\ 4A-3B=0 \Rightarrow B=-\dfrac{4}{9}\\ 2A+2B-3C=0 \Rightarrow C=\dfrac{-14}{27}\end{cases}$$

پس داریم:

$$y=y_h+y_P \Rightarrow y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}+\left(\frac{-x^2}{3}-\frac{4x}{9}-\frac{14}{27}\right)$$

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t>0$ تعریف شده است را با نماد $L(f(t))$ یا $F(s)$ نمایش می‌دهند و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را لاپلاس معکوس $F(s)$ می‌نامند و بصورت $f(t)=L^{-1}(F(s))$ نمایش می‌دهند.

- ثابت می‌شود تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی می‌باشند یعنی با فرض اینکه b و a اعداد ثابتی باشند داریم:

$$L(af(t)+bg(t))=aL(f(t))+bL(g(t))$$
$$L^{-1}(aF(s)+bG(s))=aL^{-1}(F(s))+bL^{-1}(G(s))$$

تبدیل لاپلاس توابع مهم :

با قرار دادن ضابطه تابع $f(t)$ در انتگرال $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ و محاسبه این انتگرال می‌توان تبدیل لاپلاس تابع مورد نظر را بدست آورد.

برای توابعی خاص این عمل انجام شده و نتیجه آن در جدول زیر آورده شده است.

(a عدد ثابت و n عدد طبیعی فرض شده است).

$f(t)$	a	e^{at}	sin at	cos at	sinh at	cosh at	t^n
$F(s)$	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(t)=4e^{2t}-e^{-3t}$

حل:

$$F(s)=4\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-(-3)}=\frac{4}{s-2}-\frac{1}{s+3}$$

ب) $f(t)=2\cos 3t-\sin\frac{t}{2}$

حل:

$$F(s)=2\frac{s}{s^2+(3)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2s}{s^2+9}-\frac{1}{2\left(s^2+\frac{1}{4}\right)}$$

ج) $f(t)=2t^3-t+3$

حل:

$$F(s)=2\frac{3!}{s^4}-\frac{1!}{s^2}+\frac{3}{s}=\frac{12}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}$$

مثال: لاپلاس معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $F(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{s}{s^2+4}-\frac{3s}{s^2-16}$

حل:

$$f(t)=e^{2t}+\cos 2t-3\cosh 4t$$

ب) $F(s)=\frac{1}{s^7}-\frac{2}{s^4}+\frac{5}{s}$

حل:

$$F(s)=\frac{1}{6!}\left(\frac{6!}{s^7}\right)-\frac{2}{3!}\left(\frac{3!}{s^4}\right)+\frac{5}{s}$$

$$f(t)=\frac{1}{6!}t^6-\frac{2}{3!}t^3+5$$

ج) $F(s)=\frac{1}{s^2+25}-\frac{1}{2s+3}+\frac{s}{4s^2+1}$

حل:

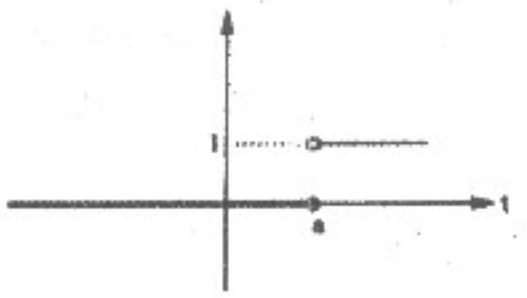
$$F(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{s^2+25}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{5}\sin 5t-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}$$

تعریف دو تابع خاص و تبدیل لاپلاس آنها

۱- **تابع پله واحد :** تابع پله واحد بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_a(t)=u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$$

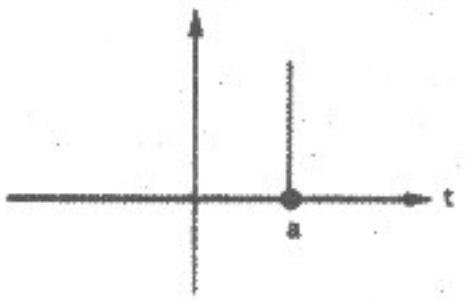


و می‌توان نشان داد:

$$L\left(u_a(t)\right)=\frac{e^{-as}}{s}$$

۲- **تابع دلتای دیراک:** تابع دلتای دیراک یا ضربه واحد بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_a(t)=\delta(t-a)=\begin{cases}0 & t\neq a\\ \infty & t=a\end{cases}$$



دقت کنید تابع دلتای دیراک یک مفهوم حدی داشته و دارای این خاصیت فرض می‌شود که سطح زیر نمودار آن واحد است و می‌توان نشان داد:

$$L\left(\delta_a(t)\right)=e^{-as}$$

مثال: مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر:

الف) $A=L\left(\sinh 2t-\cos 3t+3u_2(t)+\delta_3(t)\right)$

حل:

$$F(s)=\frac{2}{s^2-4}-\frac{s}{s^2+9}+3\frac{e^{-2s}}{s}+e^{-3s}$$

ب) $B=L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s}+3e^{-2s}+\frac{5}{s+17}\right)$

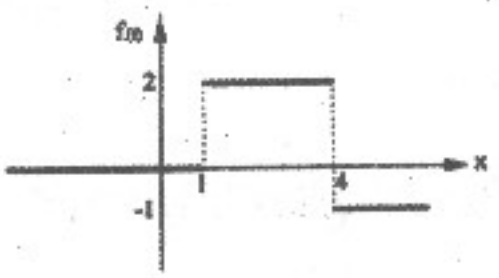
حل:

$$f(t)=u_4(t)+3\delta_2(t)+5e^{-17t}$$

نکته: بسیاری از توابع با رفتار تغییرات پله‌ای را می‌توان بر حسب مجموعی از توابع پله واحد بیان نمود و در صورت نیاز با توجه به فرمول تبدیل لاپلاس تابع پله واحد به محاسبه لاپلاس آن پرداخت.

مثال: تبدیل لاپلاس توابع ترسیم شده در اشکال زیر را بدست آورید.

الف)

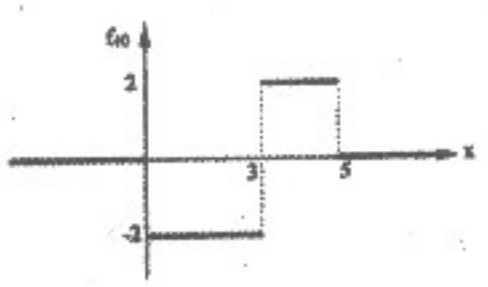


حل:

$$f(t)=2u_1(t)-3u_4(t)$$

$$F(s)=2\frac{e^{-s}}{s}-3\frac{e^{-4s}}{s}$$

ب)



حل:

$$f(t) = -2u_0(t) + 4u_3(t) - 2u_5(t)$$
$$F(s) = -2\frac{1}{s} + 4\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-5s}}{s}$$

نکته: برای محاسبه برخی انتگرالهای ناسره بصورت $I = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ چنانچه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ مشخص باشد با توجه به فرمول تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان ادعا کرد که I همان تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است که فقط بجای s باید عدد معلوم a قرار داده شود.

مثال: حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int_0^\infty (t^4 + 3t - 1)e^{-t}dt$

حل:

$$I = L(t^4 + 3t - 1)\Big|_{s=1} = \left(\frac{4!}{s^5} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s}\right)\Big|_{s=1}$$
$$I = 4! + 3 - 1 = 24 + 3 - 1 = 26$$

ب) $I = \int_0^\infty e^{-t}\cos 2t\,dt$

حل:

$$I = L(\cos 2t)\Big|_{s=1} = \frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=1} = \frac{1}{5}$$

ج) $I = \int_0^\infty \cos^2 t.e^{-2t}\,dt$

حل:

$$I = L(\cos^2 t)\Big|_{s=2} = L\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\Big|_{s=2}$$
$$I = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right)\Big|_{s=2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4+4}\right) = \frac{3}{8}$$

نکته: در بسیاری از مواقع برای محاسبه لاپلاس معکوس توابعی گویا به فرم $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ که در آن $P(s)$ و $Q(s)$ دو چند

جمله‌ای می‌باشند، چنانچه بتوان $Q(s)$ را بصورت حاصلضرب عوامل درجه اول و درجه دوم نوشت، با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان $F(s)$ را بصورت چند کسر ساده‌تر بیان نمود و سپس لاپلاس معکوس را محاسبه کرد.

مثال: لاپلاس معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $F(s)=\dfrac{2s+13}{s^2+19}$

حل:

$$F(s)=\frac{2s}{s^2+19}+\frac{13}{s^2+19}=2\frac{s}{s^2+19}+\frac{13}{\sqrt{19}}\frac{\sqrt{19}}{s^2+19}$$

$$f(t)=2\cos\sqrt{19}\,t+\frac{13}{\sqrt{19}}\sin\sqrt{19}\,t$$

ب) $F(s)=\dfrac{3s+1}{s^7}$

حل:

$$F(s)=\frac{3}{s^6}+\frac{1}{s^7}=\frac{3}{5!}\frac{5!}{s^6}+\frac{1}{6!}\frac{6!}{s^7}$$

$$f(t)=\frac{3}{5!}t^5+\frac{1}{6!}t^6$$

ج) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+3s}$

حل:

$$F(s)=\frac{1}{s(s+3)}=\frac{1}{3}\frac{(s+3)-s}{s(s+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)$$

د) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+3}$

حل:

$$F(s)=\frac{1}{(s+3)(s+1)}=\frac{1}{2}\frac{(s+3)-(s+1)}{(s+3)(s+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$$

م) $F(s)=\frac{1}{s^2-16}$

حل:

$$F(s)=\frac{1}{(s^2-4)(s^2+4)}=\frac{1}{8}\left(\frac{(s^2+4)-(s^2-4)}{(s^2+4)(s^2-4)}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s^2-4}-\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

ن) $F(s)=\frac{3s+1}{s^2+s-2}$

حل:

$$F(s)=\frac{3s+1}{(s+2)(s-1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+B(s-1)}{(s-1)(s+2)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\2A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{4}{3}\\B=\frac{5}{3}\end{cases}$$

$$F(s)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$f(t)=\frac{4}{3}e^{t}+\frac{5}{3}e^{-2t}$$

و) $F(s)=\frac{4s^2-s+4}{s^3+4s}$

حل:

$$F(s)=\frac{4s^2-s+4}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+s(Bs+C)}{s(s^2+4)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=4\\C=-1\\4A=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=3\\C=-1\end{cases}$$

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{3s-1}{s^2+4}=\frac{1}{s}+3\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}$$

$$f(t)=1+3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$$

تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

هرگاه $L(f(t))=F(s)$ می باشد داریم :

$$L(f'(t))=sF(s)-f(0)$$
$$L(f''(t))=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$
$$L(f'''(t))=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$

مثال: تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $y''+3y'+y=t$ با شرط $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ را بدست آورید.

حل:

از دو طرف معادله دیفرانسیل لاپلاس می گوییم با فرض $L(y(t))=Y(t)$ داریم :

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+3\left[sY(s)-y(0)\right]+Y(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow s^2Y(s)-1+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow$$

$$\left(s^2+3s+1\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}+1\Rightarrow\left(s^2+3s+1\right)Y(s)=\frac{s^2+1}{s^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{s^2+1}{s^2\left(s^2+3s+1\right)}$$

مثال: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل $y''+2y'+5y=e^{-t}$ با فرض $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ را بدست آورید.

حل:

از دو طرف معادله دیفرانسیل با لاپلاس گیری داریم:

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[sY(s)-y(0)\right]+5Y(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow s^2Y(s)+2sY(s)+5Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(s^2+2s+5\right)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)}$$

مثال: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل $y'''+3y'=e^{-2t}+1$ را با شرط $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ محاسبه کنید.

حل:

با لاپلاس گرفتن از معادله بالا و اعمال شرایط اولیه فوق داریم :

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)\right]+3\left[sY(s)-y(0)\right]=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s}\Rightarrow s^3Y(s)+3sY(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(s^3+3s\right)=\frac{2s+2}{s(s+2)}\Rightarrow Y(s)=\frac{2s+2}{s(s+2)\left(s^3+3s\right)}$$

قضیه اول انتقال

هرگاه $L(f(t))=F(s)$ باشد داریم :

$$L=\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)$$

قضیه دوم انتقال

هرگاه $L(f(t))=F(s)$ باشد داریم :

$$L\left(u_c(t).f(t)\right)=e^{-cs}L\left(f(t+c)\right)$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(t)=e^{3t}.\cos 2t$

حل:

$$L(\cos 2t)=\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow L\left(e^{3t}\cos 2t\right)=\frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

ب) $f(t)=e^{-4t}.t^5$

حل:

$$L\left(t^5\right)=\frac{5!}{s^6}\Rightarrow L\left(e^{-4t}.t^5\right)=\frac{5!}{(s+4)^6}$$

ج) $f(t)=u_2(t)(3t+1)$

حل:

$$F(s)=e^{-2s}.L\left(3(t+2)+1\right)=e^{-2s}L(3t+7)$$

$$F(s)=e^{-2s}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{7}{s}\right)$$

د) $f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)(\sin t+\cos 2t)$

حل:

$$F(s)=e^{\frac{-\pi}{2}s}.L\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$F(s)=e^{\frac{-\pi}{2}s}.L(\cos t-\cos 2t)=e^{\frac{-\pi}{2}s}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

مثال: لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\frac{3s+1}{s^2+2s+5}$ را بدست آورید.

حل:

چون مخرج کسر را نمی‌توان به عنوان درجه اول حقیقی تجزیه نمود، با ایجاد مربع کامل در مخرج داریم :

$$F(s)=\frac{3s+1}{(s+1)^2+4}=\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4}-\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t)=3e^{-t}\cos 2t-e^{-t}\sin 2t$$

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

هرگاه $L(f(t))=F(s)$ باشد داریم :

$$L(t.f(t))=-F'(s)$$
$$L(t^2.f(t))=F''(s)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$L(t^n.f(t))=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس

هرگاه $L(f(t))=F(s)$ باشد داریم:

$$L\left(\frac{1}{t}f(t)\right)=\int_s^\infty F(u)du$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(t)=t\cos 2t$

حل:

$$L(\cos 2t)=\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow L(t\cos 2t)=-\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\Rightarrow F(s)=-\frac{(s^2+4)-(2s)(s)}{(s^2+4)^2}\Rightarrow F(s)=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

ب) $f(t)=te^{2t}.\sin t$

حل:

$$L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow L\left(e^{2t}.\sin t\right)=\frac{1}{(s-2)^2+1}\Rightarrow L\left(t.e^{2t}.\sin t\right)=-\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right]'$$

$$\Rightarrow F(s)=-\frac{-2(s-2)}{\left[(s-2)^2+1\right]^2}=\frac{2s-4}{\left[(s-2)^2+1\right]^2}$$

ج) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$

حل:

$$L\left(\sin^2 t\right)=L\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\Rightarrow L\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)=\int_s^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+4}\right)du$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\left[Lnu-\frac{1}{2}Ln\left(u^2+4\right)\right]_s^\infty=\frac{1}{2}\left[Ln\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)\right]_s^\infty\Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}\left(0-Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\right)$$

مثال: لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید.

الف) $F(s)=Ln\left(\dfrac{s+3}{s^2+4}\right)$

حل:

$$F(s)=Ln(s+3)-Ln\left(s^2+4\right)$$

$$F'(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{2s}{s^2+4}\Rightarrow L^{-1}\left(F'(s)\right)=e^{-3t}-2\cos 2t$$

از طرفی می‌دانیم که :

$$L\left(tf(t)\right)=-F'(s)\Rightarrow L^{-1}\left(F'(s)\right)=-tf(t)$$

پس داریم :

$$e^{-3t}-2\cos 2t=-t.f(t)\Rightarrow f(t)=\frac{2\cos 2t-e^{-3t}}{t}$$

ب) $F(s)=Arccots$

حل:

$$F(s)=Arccots\Rightarrow F'(s)=\frac{-1}{1+s^2}$$

$$L^{-1}\left(F'(s)\right)=-\sin t\Rightarrow -\sin t=-t.f(t)\Rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

مثال: تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $ty'' + 2y' + ty = 0$ را بدست آورید.

حل:

از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گوییم:

$$-\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)' + 2\left(sY(s) - y(0)\right) - \left(Y(s)\right)' = 0$$
$$-\left(2sY(s) + s^2Y'(s) - y(0)\right) + 2sY(s) - 2y(0) - Y'(s) = 0$$
$$Y'(s)\left(1+s^2\right) = -y(0) \Rightarrow Y'(s) = \frac{-y(0)}{1+s^2} \Rightarrow Y(s) = -y(0)\operatorname{Arc}\tan s + k$$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

هرگاه $L\left(f(t)\right) = F(s)$ باشد داریم :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

مثال: اگر $F(s) = \frac{3}{s} + \frac{s+1}{s^2+4}$ باشد مطلوب است محاسبه : $\lim_{t\to 0} f(t)$, $\lim_{t\to\infty} f(t)$

حل:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{3s}{s} + \frac{s(s+1)}{s^2+4}\right) = 3+1 = 4$$
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{3s}{s} + \frac{s(s+1)}{s^2+4}\right) = 3+0 = 3$$

مثال: مقدار $L^{-1}\left(\frac{8-6s}{16s^2+9}\right)$ وقتی $t = 0$ است را بیابید.

حل:

$$F(s) = \frac{8-6s}{16s^2+9} = \frac{8}{16s^2+9} - \frac{6s}{16s^2+9} = \frac{8}{16}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\frac{3}{4}}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right) - \frac{6}{16}\left(\frac{s}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)$$
$$f(t) = \frac{3}{8}\sin\frac{3}{4}t - \frac{3}{8}\cos\frac{3}{4}t \Rightarrow f(0) = \frac{-3}{8}$$

راه حل دیگر:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{8-6s}{16s^2+9}\right) = \frac{-3}{8}$$

«اعداد مختلط»

با تعریف $i=\sqrt{-1}$ که به عدد موهومی محض موسوم است (و نتیجه می‌دهد $i^2=-1$) می‌توان مجموعه‌ای به نام مجموعه اعداد مختلط را تعریف نمود که مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه‌ای از آن می‌باشد. البته قابل ذکر است $i=\sqrt{-1}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است.

هر عدد مختلط بصورت $z=a+ib$ تعریف می‌شود که مطابق تعریف می گوییم:

$\text{Re}z=a$: قسمت حقیقی z

$\text{Im}z=b$: قسمت موهومی z

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$: مدول یا قدر مطلق z

$\bar{z}=a-ib$: مزدوج z

نکته: تساوی دو عدد مختلط زمانی اتفاق می‌افتد که قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

نکته: ضرب دو عدد مختلط به راحتی قابل انجام است فقط توجه داریم که : $i^2=-1$

نکته: ضرب هر دو عدد مختلط در مزدوج آن صرفاً حاصلی حقیقی دارد زیرا:

$$z\bar{z}=(a+ib).(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$$

از این حقیقت در محاسبه حاصل تقسیم دو عدد مختلط استفاده می کنیم یعنی با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج می‌توان از وجود (i) در مخرج خلاص شد.

نکته: دو عدد مختلط $z_1=a+ib$ و $z_2=x+iy$ را در نظر بگیرید:

ضرب داخلی : $z_1.z_2=ax+by$

ضرب خارجی : $z_1\times z_2=ay-bx$

نکته: از نظر هندسی هر عدد مختلط مانند $z=a+ib$ را می‌توان مانند یک نقطه با مختصات (a,b) در صفحه نشان داد:



مثال: فرض کنید داشته باشیم $z=a+ib$ ، مطلوب است محاسبه b و a از حل معادله زیر:

$3z+\bar{z}=2i+\mathrm{Im}(3+i)+\mathrm{Re}(2+3i)+|3-4i|$

حل:

$|3-4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\mathrm{Im}(3+i)=1 \quad , \quad \mathrm{Re}(2+3i)=2$

پس معادله مورد نظر چنین خواهد بود:

$3(a+ib)+(a-ib)=2i+1+2+5 \Rightarrow 3a+3ib+a-ib=8+2i$

$\Rightarrow 4a+2ib=8+2i \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z_1=2+3i$ و $z_2=3-i$ ، مطلوبست محاسبه عبارتهای زیر:

الف) z_1z_2

حل:

$z_1z_2=(2+3i)(3-i)=6-2i+9i-3i^2=6+7i+3=9+7i$

ب) $\frac{z_1}{z_2}$

حل:

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+11i-3}{9+1}=\frac{3+11i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$

ج) $z_1.z_2$ (ضرب داخلی)

حل:

$z_1.z_2=(2)(3)+(3)(-1)=6-3=3$

د) $z_1\times z_2$ (ضرب خارجی)

حل:

$z_1\times z_2=(2)(-1)-(3)(3)=-11$

مثال: فرض کنید $i=\sqrt{-1}$ باشد حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $A=i^{63}+i^{24}$

حل:

$A=(i^2)^{31}(i)+(i^2)^{12}=(-1)^{31}(i)+(-1)^{12}=-i+1=1-i$

ب) $B=(1-i)^{13}$

حل:

$$B=(1-i)^{13}=\left[(1-i)^2\right]^6.(1-i)=(1-2i+i^2)^6.(1-i)=(1-2i-1)^6.(1-i)=$$
$$=(-2i)^6.(1-i)=(-2)^6(i)^6.(1-i)=-64(1-i)=64i-64$$

مثال: با فرض اینکه $z=x+iy$ باشد هر کدام از معادلات زیر بیانگر چه اشکالی هستند؟

الف) $3Rez+Imz=1$

حل: معادله یک خط راست $3x+y=1$

ب) $z.\bar{z}=Rez$

حل:
$$x^2+y^2=x \quad \Rightarrow \quad x^2-x+y^2=0 \quad \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

دایره‌ای است به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

ج) $|z-1+2i|=1$

حل:
$$|x+iy-1+2i|=1 \Rightarrow |(x-1)+i(y+2)|=1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1$$

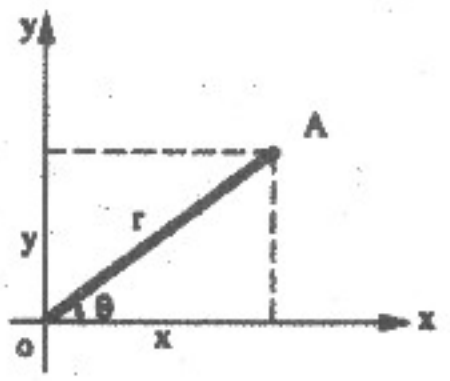
دایره‌ای است به مرکز $(1,-2)$ و شعاع 1

نکته: معادله $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ بیانگر دایره‌ای است به مرکز (α,β) و شعاع R.

نکته: معادله $|z-z_0|=R$ بیانگر دایره‌ای است به شعاع R و مرکز z_0.

دستگاه مختصات قطبی

برای مشخص کردن موقعیت یک نقطه در دستگاه مختصات دکارتی به دو مختصه (x,y) نیاز داریم که این دو مختصه همان طول (x) وعرض (y) نقطه می‌باشند. در صورتی که در دستگاه مختصات قطبی هر نقطه بوسیله دو متغیر (r,θ) مشخص می‌شود. که بصورت زیر تعریف می‌شود:



oA : شعاع حامل نقطه A

r: طول شعاع حامل نقطه

θ: زاویه شعاع حامل نقطه با جهت مثبت محور x ها

رابطه بین متغیرهای دو دستگاه مختصات بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 & \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} & \Rightarrow \theta = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

در محاسبه زاویه θ از رابطه فوق باید به محل قرار گرفتن نقطه در صفحه مختصات و اینکه در کدام ربع دستگاه مختصات قرار دارد توجه کرد زیرا زوایایی که در π با هم اختلاف دارند دارای tan یکسانی می‌باشند:

$$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$

مثال : نقطه $A\left(3,\hat{\frac{\pi}{3}}\right)$ در مختصات قطبی و نقطه $B\left(1,-\sqrt{3}\right)$ در مختصات دکارتی توصیف شده است آنها را در مختصات دیگر بنویسید.

حل :

$$A:\begin{cases} r=3 \\ \theta=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \\ y = r\sin\theta = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B:\begin{cases} x=1 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \text{Arc}\tan\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{-\pi}{3} & \text{قابل قبول} \\ \theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow B\left(2,\frac{-\pi}{3}\right)$$

نکته : فرض کنید دو نقطه $A\left(r,\hat{\theta}\right)$ و $B\left(\rho,\hat{\phi}\right)$ در مختصات قطبی داده شده است فاصله آن ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)}$$

مثال: فاصله دو نقطه‌ای که در دستگاه مختصات قطبی بصورت $A\left(2,\hat{\frac{7\pi}{6}}\right)$ و $B\left(5,\hat{\frac{3\pi}{6}}\right)$ بیان شده اند را محاسبه کنید.

حل:

$$d = \sqrt{2^2+5^2-2(2)(5)\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}\right)} = \sqrt{4+25-20\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{29-20\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{29+10} = \sqrt{39}$$

مثال: معادله دایره‌ای که مرکز آن در نقطه (0,2) و شعاع آن برابر 2 می‌باشد را در مختصات قطبی بازنویسی کنید.

حل:

$$(x-0)^2+(y-2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2+y^2-4y+4 = 4 \Rightarrow x^2+y^2-4y = 0$$
$$\Rightarrow (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-4r\sin\theta = 0$$
$$\Rightarrow r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-4r\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 4r\sin\theta = 0 \ \text{یا} \ r(r-4\sin\theta) = 0$$

مثال: معادله اشکالی در مختصات قطبی بصورت زیر بیان شده است ، هر کدام از آنها بیان کننده چه اشکالی می‌باشند؟

الف) $r = \dfrac{2}{3\cos\theta - \sin\theta}$

حل:

معادله خط راست : $3r\cos\theta - r\sin\theta = 2 \Rightarrow 3x - y = 2$

ب) $r = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$

حل:

$$r\cos 2\theta = \cos\theta \Rightarrow r\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \cos\theta \xrightarrow{\text{طرفین را در } r \text{ ضرب می کنیم}} r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = r\cos\theta \Rightarrow r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r\cos\theta$$

$\Rightarrow$ معادله هذلولی است: $x^2 - y^2 = x$

یادآوری :

معادله $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ را در نظر بگیرید:

در حالت کلی می‌توان گفت:

الف) اگر $a = b \neq 0$ باشد شکل مذکور توصیف کننده دایره است.

ب) اگر a,b مخالف صفر و مختلف العلامه باشند آنگاه شکل حاصله یک هذلولی است.

ج) اگر a,b مخالف صفر و متحد العلامه باشند آنگاه شکل مذکور توصیف بیضی است. $(a \neq b)$

د) اگر a یا b (فقط یکی از آنها) برابر با صفر باشد آنگاه شکل مذکور یک سهمی است .

هـ) اگر $a = b = 0$ باشد آنگاه شکل حاصله یک خط می‌باشد.

فرم قطبی اعداد مختلط

عدد مختلط $z = x + iy$ را در نظر بگیرید می‌توان نوشت:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

با فرض $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ داریم :

فرم قطبی عدد مختلط : $z = re^{i\theta}$

مثال: عدد مختلط $z = -1 + i$ مفروض است بیان قطبی آن چگونه خواهد بود؟

حل:

$$x=-1, y=1 \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2} \\ \theta=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{-1}\right)=\operatorname{Arc}\tan(-1) \Rightarrow \begin{cases} \theta=-\frac{\pi}{4} & \text{غیر قابل قبول} \\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4} & \text{قابل قبول} \end{cases} \end{cases}$$

پس داریم : $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید:

الف) $e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

حل:

$$e^{i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(0+i)+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i$$

ب) i^i

حل:

$$i^i=(0+i)^i=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

ریشه n ام یک عدد مختلط

اگر $z=re^{i\theta}$ باشد داریم :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)=\left(\sqrt[n]{r},\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \qquad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

مثال: مطلوب است محاسبه ریشه پنجم عدد مختلط : $4-4i$

حل:

$$r=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$\theta=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{-4}{4}\right)=\operatorname{Arc}\tan(-1)=\frac{-\pi}{4}$$
$$\sqrt[5]{4-4i}=\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right)=\sqrt[10]{32}\left(\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right),\ k=0,1,2,3,4$$

لگاریتم یک عدد مختلط

اگر $z = re^{i\theta}$ باشد داریم:

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

در رابطه فوق اگر $k = 0$ قرار دهیم عبارت بدست آمده مقدار اصلی $\ln z$ نامیده می‌شود.

$\ln z$ مقدار اصلی $= \ln r + i\theta$

مثال: مطلوب است محاسبه $\text{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$:

حل:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2 \\ \theta = \text{Arc}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \text{Arc}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right) = \text{Ln}(2) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

توان nام یک عدد مختلط

اگر $z = re^{i\theta}$ باشد داریم:

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) \quad (n: \text{عدد طبیعی})$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{18}$.

حل:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 3 \\ \theta = \text{Arc}\tan\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{18} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{18} = 2^{18}\left(e^{i\frac{18\pi}{3}}\right) = 2^{18}\left(\cos(6\pi) + i\sin(6\pi)\right) = 2^{18}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

حل:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3+1} = 3 \\ \theta = \text{Arc}\tan\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(1+\sqrt{3}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)\rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{3+1}=2\\ \theta=\text{Arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\theta=\dfrac{-\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\left(1-\sqrt{3}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{10}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{10}=e^{i\frac{20\pi}{3}}=\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب) $\ln(-1)$

حل:

$$-1\begin{cases}r=1\\ \theta=\pi\end{cases}$$

$$\ln(-1)=\ln r+i(\theta+2k\pi)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=i\pi(1+2k)$$

ج) $\sqrt{\dfrac{1+i}{1+i+(1-i)^2}}$

حل:

$$\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}=\frac{1+i}{1+i+1-2i-1}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i-1}{1+1}=i$$

$$i=\begin{cases}r=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\frac{1+i}{1+i+(1-i)}}=\sqrt{i}=\sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right)$$

$k=0\rightarrow$ جواب اول : $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1\rightarrow$ جواب دوم : $\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

« بردارها »

بردارها در فضا :

یک بردار در فضا از طریق سه مولفه آن قابل توصیف است که معمولاً به یکی از دو صورت زیر بیان می‌شود:

$\vec{u} = (a,b,c)$ یا $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

می‌توان نشان داد طول بردار مذکور چنین محاسبه می‌شود:

$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

نکته: دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در فضا در نظر بگیرید، بردار زیر قابل تعریف است:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

بردار یکه: بردار یکه بردار $\vec{u}$ یعنی برداری که راستا و جهت آن مانند بردار $\vec{u}$ است ولی طول آن واحد می‌باشد و بصورت زیر بدست می‌آید:

$\vec{\lambda}_{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

نکته: اگر بردار $\vec{u}$ با جهت مثبت محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ بسازد همواره داریم :

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

بخاطر داشته باشید که می‌توان گفت:

$\vec{\lambda}_{\vec{u}} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$

مثال : برداری در فضا با طول 4 واحد مفروض است اگر این بردار با جهت مثبت محورهای x و y به ترتیب زوایای $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ بسازد و بدانیم با جهت مثبت محور z ها زاویه منفرجه ساخته، اولاً: بردار یکه این بردار را مشخص کنید. ثانیاً : خود بردار را مشخص کنید.

حل :

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 4 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{3} \\ \beta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{چون } \gamma \text{ منفرجه است}} \cos\gamma = \frac{-1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \vec{\lambda}_{\vec{u}} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \dfrac{1}{2}\vec{k} \\ \vec{u} = |\vec{u}|.\vec{\lambda}_{\vec{u}} = 4\left(\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \dfrac{1}{2}\vec{k}\right) = 2\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$$

انوع ضرب بردارها:

سه بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$
$$\vec{v} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$$
$$\vec{\omega} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

ضربهای زیر قابل تعریف است:

۱- ضرب داخلی دو بردار :

$$\vec{u}.\vec{v} = am + bn + cp$$
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

θ : زاویه بین دو بردار

بخاطر داشته باشید با توجه به ضرب داخلی زاویه بین دو بردار را می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

لذا طبیعی است شرط عمود بودن دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ آن است که ضرب داخلی آنها صفر شود.

مثال : بردارهای $A = (2,3,-1)$ و $B = (-1,1,2)$ مفروضند زاویه بین دو بردار $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ را بیابید.

حل:

$$\vec{u} = \vec{A} + \vec{B} = (1,4,1)$$
$$\vec{V} = \vec{A} - \vec{B} = (3,2,-3)$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(1)(3)+(4)(2)+(1)(-3)}{\sqrt{1+16+1}.\sqrt{9+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{18\times 22}} \Rightarrow \theta = \text{Arc}\cos\frac{4}{3\sqrt{11}}$$

۲- ضرب خارجی دوبردار:

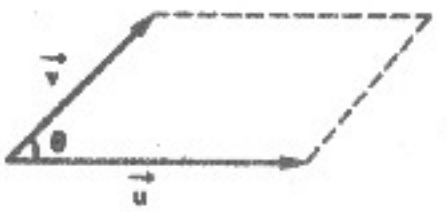
ضرب خارجی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که حاصلش یک بردار می‌باشد بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

توجه داشته باشید که ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر دو بردار اولیه.

توجه :

۱- اگر $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{N}$ باشد می‌توان نشان داد اندازه بردار N برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که می‌توان برروی دوبردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخت.



$$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{N}| = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

۲- دو بردار زمانی با هم موازی هستند (یا به تعبیری با هم وابستگی خطی دارند) که ضرب خارجی آنها برابر با صفر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

مثال : ضرب خارجی دو بردار زیر را پیدا کنید: $\vec{v}=(-1,0,1)$ ، $\vec{u}=(1,2,0)$

حل:

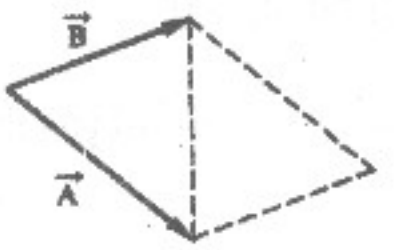
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i(2-0)-j(1+0)+k(0+2)=(2,-1,2)$$

مثال : مساحت مثلث ساخته شده برروی دو بردار $\vec{A}=2\vec{i}+3\vec{k}$ و $\vec{B}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ رامحاسبه کنید.

حل: کافی است مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی دوبردار را بیابیم سپس حاصل را نصف کنیم تا مساحت مورد نظر بدست آید.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}(0+3)-\vec{j}(4-3)+\vec{k}(-2-0)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$



$$\text{مساحت متوازی الاضلاع}=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{(3)^2+(1)^2+(2)^2}=\sqrt{14}$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

۳- ضرب مخلوط سه بردار :

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{\omega})=\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

بخاطر داشته باشید قدر مطلق عدد بدست آمده از حاصلضرب مخلوط سه بردار حجم متوازی السطوحی را نشان می‌دهد که برروی آن سه بردار قابل ساختن است.

نکته : شرط هم صفحه بودن سه بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{\omega}$ آن است که ضرب مخلوط آنها صفر شود.

تعریف : سه بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{\omega}$ دارای وابستگی خطی می‌باشند هرگاه بتوان اعداد ثابتی مانند L_1 و L_2 پیدا کنیم که $L_1\vec{u}+L_2\vec{v}=\vec{\omega}$. البته اگر سه بردار مذکور وابستگی خطی نداشته باشند، استقلال خطی دارند.

قضیه : اگر ضرب مخلوط سه بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{\omega}$ صفر باشد آن سه بردار وابستگی خطی دارند.

مثال : مقدار α را طوری پیدا کنید تا سه بردار زیر وابستگی خطی داشته باشند.

$\vec{u}=\alpha\vec{i}-3\vec{k}$ $\quad\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ $\quad\omega=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

حل:

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha(1+2)+0-3(4-1)=0 \Rightarrow 3\alpha=9 \Rightarrow \alpha=3$$

پس اگر x=3 باشد وابستگی خطی ایجاد می‌شود.

مثال: حجم متوازی السطوحی که بوسیله سه بردار $i+k$, $i+j$, $j+k$ مشخص می‌شود را محاسبه کنید:

حل:

$\vec{A}=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1)$

$\vec{B}=\vec{i}+\vec{j}=(1,1,0)$

$\vec{C}=\vec{j}+\vec{k}=(0,1,1)$

متوازی السطح : $V=\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2$

« خط و صفحه »

معادلات خط و صفحه در فضا

۱- معادله صفحه‌ای که از نقطه (x_0,y_0,z_0) گذشته و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ بر آن عمود باشد چنین نوشته می‌شود:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

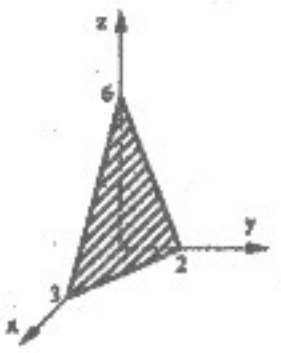
۲- معادله خطی که از نقطه (x_0,y_0,z_0) گذشته و بردار $\vec{u}(p,q,r)$ با آن موازیست بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{(فرم استاندارد)}\quad \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=t$$

$$\text{(فرم پارامتری)}\quad \begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases}$$

مثال: صفحه $2x+3y+z=6$ را در نظر بگیرید، حجم ایجاد شده توسط این صفحه و صفحات مختصات چقدر است؟

حل:



محل تقاطع با محور xها $\xrightarrow{y=z=0} 2x=6 \Rightarrow x=3$

محل تقاطع با محور yها $\xrightarrow{x=z=0} 3y=6 \Rightarrow y=2$

محل تقاطع با محور zها $\xrightarrow{x=y=0} z=6$

$$\text{حجم هرم}: v=\frac{1}{3}(\text{مساحت قاعده})\times(\text{ارتفاع})=\frac{1}{3}\left(\frac{3\times 2}{2}\right)(6)=6$$

مثال: صفحه‌ای را در نظر بگیرید که از نقطه $(1,2,3)$ گذشته و بر خط $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ عمود است.

اولاً: معادله این صفحه را بنویسید.

ثانیاً: محل تقاطع این صفحه با خط $\Delta':\frac{x}{2}=y+1=z$ را پیدا کنید.

حل:

الف)

ملاحظه می شود بردار $(2,3,1)$ که با خط موازی است بر صفحه نیز عمود است:

$$\text{معادله مشخصه}: 2(x-1)+3(y-2)+1(z-3)=0 \Rightarrow 2x+3y+z-11=0$$

ب)

ما به دنبال نقطه‌ای از خط Δ' هستیم که مختصات آن در صفحه نیز صدق کند.

$$\text{در فرم پارامتری } \begin{cases} x = 2t \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}$$

با قرار دادن مختصات فوق در معادله صفحه داریم:

$$2(2t)+3(t-1)+t-11=0 \Rightarrow 4t+3t-3+t-11=0 \Rightarrow 8t=14 \Rightarrow t=\frac{7}{4}$$

$$\text{محل تقاطع خط و صفحه}: \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{3}{4} \\ z=\frac{7}{4} \end{cases}$$

مثال: معادله صفحه‌ای را مشخص کنید که از نقطه $(0,1,-2)$ بگذرد و بردارهای $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ را شامل می‌شود. ثانیاً مقدار m را طوری تعیین کنید تا این صفحه بر صفحه $mx+4y-z+2=0$ عمود باشد.

حل: از ضرب خارجی دوبردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برداری حاصل می‌شود که بر هر دوی آنها عمود است و به طبع بر صفحه مورد نظر نیز عمود می‌باشد.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=i(0+1)-j(4+1)+k(2-0)=\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\text{معادله صفحه مورد نظر}: 1(x-0)-5(y-1)+2(z+2)=0 \Rightarrow x-5y+2z+9=0$$

ب) طبیعی است برای آنکه صفحه پیدا شده بر صفحه داده شده در مسئله عمود باشد باید بردارهای نرمال این دو صفحه بر هم عمود باشند و به تعبیری ضرب داخلی نرمالها صفر شود.

$$(1,-5,2).(m,4,-1)=0 \Rightarrow m-20-2=0 \Rightarrow m=22$$

نکته: فاصله نقطه (x_0,y_0,z_0) تا صفحه $ax+by+cz+d=0$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: معادله یک صفحه و یک خط بصورت زیر داده شده است:

$$\Delta: \frac{x-2}{3}=\frac{2y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$
$$P: x+2y+3z+5=0$$

الف) محل تقاطع خط Δ با صفحه xoy را تعیین کنید و آنرا A بنامید.

ب) فاصله نقطه A تا صفحه P را بدست آورید.

حل:

الف) اگر خط Δ صفحه xoy را قطع کند داریم: $z=0$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{2y+1}{2}=0-1 \begin{cases} \frac{x-2}{3}=-1 \Rightarrow x=-1 \\ \frac{2y+1}{2}=-1 \Rightarrow y=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

پس محل تقاطع خط Δ با صفحه xoy برابر $A=\left(-1,\frac{-3}{2},0\right)$ است.

ب) فاصله نقطه $\left(-1,\frac{-3}{2},0\right)$ از صفحه P چنین است:

$$H=\frac{\left|(1)(-1)+2\left(\frac{-3}{2}\right)+3(0)+5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

نکته: فاصله دو صفحه موازی $ax+by+cz+d=0$ و $ax+by+cz+d'=0$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال : دو وجه یک مکعب برروی دو صفحه زیر واقع شده است، حجم این مکعب را بدست آورید

$$P: 2x-y+2z+4=0$$
$$Q: 4y-2y+4z+10=0$$

حل: فاصله این دو صفحه موازی طول ضلع مکعب را نشان می‌دهد.

فاصله دو صفحه : $L=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}$

حجم مکعب $=L^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

مثال: زاویه بین دو خط $\begin{cases}\Delta:\frac{x}{2}=y+1=\frac{z}{3}\\ \Delta':x-1=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}\end{cases}$ را بیابید.

حل:

$(2,1,3)$: بردار موازی خط Δ

Δ' : بردار موازی خط $(1,2,3)$

در حقیقت زاویه بین دو خط همان زاویه بین دو بردار است پس داریم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{2+2+9}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}.\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = \frac{13}{14} \Rightarrow \theta = \text{Arc}\cos\left(\frac{13}{14}\right)$$

مثال : زاویه بین خط $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = z+1$ و صفحه $x+2y+2z+4=0$ را بدست آورید.

حل:

بردار موازی خط : $(2,2,1)$

بردار عمود بر صفحه : $(1,2,2)$

زاویه بین این دو بردار عبارتست از :

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{9}.\sqrt{9}} \Rightarrow \theta = \text{Arc}\cos\left(\frac{8}{9}\right)$$

پس زاویه بین خط و صفحه عبارت است از :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \text{Arc}\cos\left(\frac{8}{9}\right)$$

نکته: اگر معادله دو صفحه $\begin{vmatrix} P=0 \\ Q=0 \end{vmatrix}$ باشد معادله صفحات گذرنده از خط فصل مشترک این دو صفحه چنین است:

$$P+kQ=0$$

مثال: معادله دو صفحه بصورت زیر داده شده است: $\begin{cases} P: x+2y-z+1=0 \\ Q: 2x+z+2=0 \end{cases}$ معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک این دو صفحه گذشته و خط $\Delta: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{3}$ را در نقطه‌ای به طول 7 قطع کند.

حل:

$$P+kQ=0 \Rightarrow (x+2y-z+1)+k(2x+z+2)=0$$

اما روی خط Δ جایی که $x=7$ است داریم :

$$\frac{7-1}{2} = y = \frac{z}{3} \Rightarrow y=3\ ,\ z=9$$

پس نقطه $(7,3,9)$ باید در معادله صفحه مورد نظر صدق کند.

$$(7+2(3)-9+1)+k(2(7)+9+2)=0 \Rightarrow k=\frac{-1}{5}$$

معادله صفحه مورد نظر : $(x+2y-z+1)-\frac{1}{5}(2x+z+2)=0$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x+2y-\frac{6}{5}z+\frac{3}{5}=0$$

$$3x+10y-6z+3=0$$

« ماتریسها »

یک ماتریس مانند $A_{m\times n}$ رشته‌ای از عناصر است که در m سطر و n ستون قرار گرفته است و منظور از A_{ij} عنصری از این ماتریس است که در سطر iام و ستون jام این ماتریس واقع شده است.

منظور از ترانها ده یا ترانسپوزه ماتریس A که آن را با A' یا A^t نمایش می‌دهیم ماتریسی است که برای یافتن آن کافیست جای سطرها و ستونهای ماتریس A را با هم عوض کنیم لذا طبیعی است اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد A' ماتریسی $n\times m$ است و داریم: $A_{ij}=A'_{ji}$

همانطور که می‌دانیم بحث ضرب ماتریسها تنها در شرایط خاصی قابل انجام است و از روال کلی زیر تبعیت میکند:

$$A_{m\times p}.B_{q\times p}\longrightarrow C_{m\times p}$$

البته به خاطر داریم با فرض انجام پذیر بودن ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی داریم:

۱) ضرب ماتریسها خاصیت جابجایی ندارد: $A.B\neq B.A$

۲) ضرب ماتریسها خاصیت شرکت پذیری دارد: $(A.B).C=A.(B.C)$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه $A.A'$ ؟

حل:

$$A.A'=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2\times 2)+(3\times 3) & (2\times -1)+(3\times 1)\\ (-1\times 2)+(1\times 3) & (-1\times -1)+(1\times 1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ کدامیک از عبارتهای A.B یا B.A قابل محاسبه است و برای آن موردی که قابل انجام است عنصر واقع بر سطر دوم و ستون سوم را بدست آورید.

حل:

$$A_{3\times 3}.B_{3\times 4}\xrightarrow{\text{قابل انجام}}C_{3\times 4}$$

$B_{3\times 4}.A_{3\times 3}\longrightarrow$ غیر قابل انجام

$$(A.B)_{23}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=(1\times 2)+(2\times 1)+(1\times 0)=4$$

مثال: با فرض $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه A^{50}.

حل:

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$A^{50}=\begin{bmatrix}51 & -50\\ 50 & -49\end{bmatrix}$$

مثال: مطلوب است محاسبه x با استفاده از دستگاه ماتریس زیر:

$$\begin{bmatrix}x & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

حل:

$$\begin{bmatrix}(x-2) & (2x+1) & (x+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

$$(x-2)+2(2x+1)+3(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-2+4x+2+3x+6=0$$

$$\Rightarrow 8x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-6}{8}$$

ماتریس مربعی و ماتریس همانی

ماتریس A را یک ماتریس مربعی گویند هر گاه تعداد سطرها و تعداد ستونهای آن با هم برابر باشند. ماتریس همانی (یکه)، ماتریس مربعی است که عناصر روی قطر اصلی آن همگی عدد 1 و تمام درایه‌های دیگر صفر باشند و آن را با I نمایش می‌دهیم.

$$I_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

نکته: $A_{n\times n}.I_{n\times n}=I_{n\times n}.A_{n\times n}=A_{n\times n}$

در ارتباط با ماتریسهای مربعی بحثهای زیر مطرح می‌شوند:

۱) تریس یک ماتریس مربعی مانند A که آن را با نماد TrA نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس.

۲) دترمینان یک ماتریس مربعی مانند A که با نماد $|A|$ یا $\det A$ نمایش داده می‌شود را می‌توان از طریق بسط آن دترمینان نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه محاسبه کرد.

برای یک ماتریس مربعی 2×2 مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$|A| = ad - bc$$

همچنین برای یک ماتریس مربعی 3×3 مانند زیر داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$ بسط دترمینان نسبت به سطر اول

توجه: دقت کنید مناسب است بسط یک دترمینان را نسبت به سطر یا ستونی انجام دهیم که در آن بیشترین درایه صفر وجود داشته باشد. فقط توجه داریم علامت لازم در کنار هر عنصر در بسط دترمینان از رابطه $(-1)^{i+j}$ حاصل می‌شود که در آن i و j شماره سطر و ستون آن عنصر می‌باشد.

مثال : فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 3x & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه x بطوریکه : $\mathrm{Tr}A = \det A$

حل:

$$3x+4 = 4(3x)-(-1)(2)$$
$$3x+4 = 12x+2 \Rightarrow x=\frac{2}{9}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

حل:

$$x(1-6)+1(1+3)+2(2+1)=3 \Rightarrow -5x+4+6=3 \Rightarrow -5x=-7 \Rightarrow x=\frac{7}{5}$$

مثال : مطلوب است محاسبه α از حل معادله زیر:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

حل: از آنجا که بیشترین درایه صفر در سطر سوم واقع شده است پس دترمینان مذکور را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$\text{حاصل دترمینان} : (-1)^{3+2}.2.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\left[2(4-1)-1(-2-\alpha)-1(-1-2\alpha)\right] = 4$$

$$= -2(6+2+\alpha+1+2\alpha) = -2(9+3\alpha) = 4 \Rightarrow 3\alpha+9=-2 \Rightarrow \alpha = \frac{-11}{3}$$

« چند نکته در بحث دترمینانها »

۱- چنانچه در یک ماتریس تمام درایه‌های یک سطر یا تمام درایه‌های یک ستون صفر باشد دترمینان آن ماتریس صفر است.

۲- اگر در یک ماتریس دوسطر یا دوستون کاملاً مشابه باشند دترمینان آن صفر است.

۳- اگر در یک ماتریس k برابر سطری در سطر دیگر و یا k برابر ستونی در ستون دیگر نوشته شده باشد دترمینان آن ماتریس صفر است.

۴- اگر در یک ماتریس k برابر سطری به اضافه k' برابر سطری دیگر در سطر دیگری نوشته شده باشد (در ستون هم همانطور) حاصل دترمینان ماتریس صفر است.

۵- اگر تمام درایه‌های یک سطر یا تمام درایه‌های یک ستون ماتریسی را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان حاصله k برابر دترمینان ماتریس اولیه است.

۶- اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های بالای قطر اصلی و یا تمام درایه‌های پایین قطر اصلی همگی صفر باشند، آن ماتریس را از نوع مثلثی می‌گوییم و دترمینان این نوع ماتریس‌ها را می‌توان از حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی ماتریس پیدا کرد.

۷- اگر B و A دو ماتریس مربعی $n\times n$ بوده و P یک عدد طبیعی و k یک عدد حقیقی باشد داریم :

$$|A.B| = |A|.|B| \qquad |A| = |A^t|$$
$$|A^P| = |A|^P \qquad |k.A_{n\times n}| = k^n|A|$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ چنانچه تعریف کنیم: $C = A^5.\frac{B}{2}$ دترمینان ماتریس C را بیابید.

حل: ماتریسهای A و B هر دو از نوع مثلثی می‌باشند پس داریم:

$$|A| = 2(1)(-1) = -2$$
$$|B| = 3(1)(2) = 6$$
$$C = A^5\left(\frac{1}{2}B\right) \Rightarrow |C| = \left|A^5.\frac{1}{2}B\right| = \left|A^5\right|.\left|\frac{1}{2}B\right| = |A|^5.\left(\frac{1}{2}\right)^3|B| = (-2)^5.\left(\frac{1}{2}\right)^3.6 = -24$$

مثال : در معادلات زیر مقدار m را بیابید:

الف) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & (m+2) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

ب) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & m \end{vmatrix} = 0$

حل:

الف) ماتریس یک ماتریس بالا مثلثی است.

معادله دو جواب دارد. $3(m+2)(m)(-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$

ب) اگر کمی دقت کنیم می‌بینیم عناصری که روی سطر چهارم قرار گرفته‌اند مجموع عناصر روی سطر دوم و سوم می‌باشند پس کافی است بدست آوردن دترمینانی مساوی صفر داشته باشیم: $m = 2+2 = 4$

دترمینان کهاد و همسازه

اگر A یک ماتریس مربعی باشد برای هر کدام از عناصر آن می‌توان یک دترمینان کهاد و یک همسازه تعریف کرد بطوریکه:

دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون عنصر A_{ij} = دترمینان کهاد عنصر $A_{ij} = \Delta_{ij}$

همسازهٔ عنصر $A_{ij} = N_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

ماتریس همسازه ها و ماتریس الحاقی

فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد و ما همسازه نظیر تک تک عناصر آن را یافته باشیم، اگر این همسازه‌ها را به جای عنصر نظیرش در ماتریس A جایگزین کنیم ماتریسی حاصل می‌شود که آن را ماتریس همسازه های A می‌نامیم و با N نمایش می‌دهیم

(cof A) . و به ترانهاده آن یعنی N′ ماتریس الحاقی (Adj A) می گویند.

مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ مفروض است دترمینان کهاد عنصر A_{11} و همسازه عنصر A_{12} را بیابید.

حل:

$$\Delta_{11} = -4$$
$$N_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = (-1)(-1) = 1$$

مثال : فرض کنید داریم $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$ درایه واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس الحاقی آن را بیابید.

حل:

$$N'_{23}=N_{32}=(-1)^{3+2}\,\Delta_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1(2-6)=4$$

معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی باشد که دترمینانی مخالف صفر دارد، آنگاه این ماتریس معکوس پذیر است یعنی می‌توان ماتریسی مانند A^{-1} (معکوس A) به گونه‌ای یافت که داشته باشیم :

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$$

برای پیدا کردن A^{-1} می‌توان نوشت:

$$A^{-1}=\frac{N'}{|A|}$$

به تعبیری:

$$A^{-1}_{ij}=\frac{N'_{ij}}{|A|}=\frac{N_{ji}}{|A|}$$

نکته:

۱- برای ماتریس مربعی 2×2 مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ داریم :

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}{ad-bc}\qquad \text{با شرط } ad-bc\neq 0$$

۲-

الف) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ ب) $(A')'=A$

ج) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$ د) $(A^{-1})^{-1}=A$

ر) $|A^{-1}|^{P}=|A^{P}|^{-1}$ ز) $|A'|^{P}=|A^{P}|'$

س) $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$ ش) $(AB)'=B'.A'$

هـ) $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$ م) $(A+B)'=A'+B'$

۳- اگر $A'=A$ باشد آنگاه A ماتریس متقارن است.

اگر $A' = -A$ باشد آنگاه A ماتریس **ضد متقارن** است.

اگر $A' = A^{-1}$ باشد آنگاه A ماتریس **متعامد** است

توجه ـ در ماتریسهای متعامد دترمینان ماتریس قطعاً 1+ یا 1- است.

مثال : مقدار k چقدر باشد تا ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ فاقد معکوس باشد؟

حل:

$$|A| = 0 \Rightarrow 1(4-0) - k(8-6) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه $C = A^{-1}.(A+I)$

حل:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{8+3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$C = A^{-1}.A + A^{-1}I = I + A^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{13}{11} \end{bmatrix}$$

مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است درایه واقع بر سطر دوم و ستون سوم در معکوس این ماتریس چیست؟

حل:

$$A_{23}^{-1} = \frac{N'_{23}}{|A|} = \frac{N_{32}}{|A|}$$

$$|A| = 2(8-3) + 1(1-6) = 10 - 5 = 5$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2}\,\Delta_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$$

$$A_{23}^{-1} = \frac{-5}{5} = -1 \quad \Rightarrow \quad A_{23}^{-1} = -1$$

مثال : می دانیم A یک ماتریس مربعی 5×5 است که دترمینانی برابر 3 دارد دترمینان همسازه‌های A کدام است؟

حل:

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} = \frac{N'}{3} \quad \Rightarrow \quad N' = 3A^{-1}$$

$$|N'| = |3.A^{-1}| = 3^3 |A^{-1}| = 3^3.\frac{1}{|A|} = 3^3.\frac{1}{3} = 3^4 \Rightarrow |N'| = 81$$

مثال : آیا ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ متعامد است؟

حل:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم : $A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ملاحظه می‌شود که $A^{-1} = A'$ پس ماتریس متعامد است.

مثال : ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید و از حیث متقارن یا ضد متقارن بودن بررسی کنید:

الف) $A - A'$

حل: الف) پس ضد متقارن است $(A - A')' = A' - A = -(A - A')$

ب) $A.A'$

حل: ب) پس متقارن است $(A.A')' = (A')'.(A)' = A.A'$

مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی

برای بدست آوردن مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی کافی است معادله مشخصه ماتریس را تشکیل داده و آن را حل کنیم. برای تشکیل معادله مشخصه باید ماتریس مورد نظر را نوشته و از روی عناصر قطر اصلی λ (مقادیر ویژه) را کم کنیم و دترمینان ماتریس حاصله را مساوی صفر قرار دهیم.

مثال : مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را بیابید:

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

حل:

معادله مشخصه : $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(5-\lambda)-4=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+1=0$

$$\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{8} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=3+\sqrt{8}\\ \lambda_2=3-\sqrt{8}\end{cases}$$

ب) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

حل:

معادله مشخصه : $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 3 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right]-2\left[3(1-\lambda)-1\right]+3\left[3-1(2-\lambda)\right]=0$$
$$\lambda^2-3\lambda+1-\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-4+6\lambda+3+3\lambda=0$$
$$-\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda=0 \Rightarrow \lambda\left(-\lambda^2+4\lambda+5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=-1\\ \lambda_3=5\end{cases}$$

نکته مهم : اگر **A** یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد معادله مشخصه آن یک معادله درجه **n** است و انتظار داریم از حل این معادله مشخصه، **n** مقدار ویژه پیدا کنیم. آنچه اهمیت دارد این است که :

$\text{Tr}A$ = حاصل جمع مقادیر ویژه

$\det A$ = حاصل ضرب مقادیر ویژه

مثال : ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ مفروض است حاصلضرب و حاصل جمع مقادیر ویژه این ماتریس را بیابید ؟

حل:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\text{Tr}A=1+2+1=4$$
$$\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3=\det A=1(2-1)-2(3-1)+3(3-2)=1-4+3=0$$

مثال : می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & \alpha\end{bmatrix}$ برابر صفر می‌باشد حاصلضرب مقادیر ویژه کدام است؟

حل:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \Rightarrow \text{Tr}A=0 \Rightarrow 4+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-4$$

$$\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(-8-3)+1(-4-0)+0 = -26 \implies \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = -26$$

مرتبه یک ماتریس

رتبه یک ماتریس برابر است با درجه بزرگترین دترمینان مربعی غیر صفر که از داخل آن ماتریس می‌توان استخراج کرد. به سادگی می‌توان نشان داد برای یک ماتریس $A_{m\times n}$ قطعاً داریم :

$$\text{RankA} \le \min(m,n) \quad (\text{مرتبه A})$$

مثال: a را طوری پیدا کنید که مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ عدد 3 نباشد، سپس بگویید رتبه این ماتریس چند است؟

حل:

اولاً لازم است دترمینان این ماتریس صفر باشد.

$$|A| = 0 \implies 1(2a-2)+1(2-6)+0 = 0 \implies 2a-2-4 = 0 \implies a = 3$$

حال از خود می‌پرسیم آیا لااقل یک دترمینان 2×2 از داخل این ماتریس می‌توانیم استخراج کنیم که مخالف صفر باشد؟

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{RankA} = 2$$

مثال: رتبه ماتریس زیر چند است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) 4　　ب) 2

ج) 3　　د) 1

حل: بدیهی است که از آنجا که $A_{4\times 3}$ می‌باشد RankA نمی‌تواند 4 باشد از طرفی ملاحظه می‌کنیم از دل این ماتریس می‌توان دوتا ماتریس 3×3 زیر را استخراج کرد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بدیهی است هر دو ماتریس 3×3 مذکور دارای دترمینان صفر است پس $\text{RankA} \neq 3$ حال از آنجا که لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر از ماتریس A قابل استخراج است $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ پس $\text{RankA} = 2$

« دستگاه معادلات »

دستگاه معادلات خطی

برای سهولت، بحثهای زیر را برای وضعیتهای سه معادله سه مجهول بیان می‌کنیم که قابل تعمیم نیز می‌باشد:

دستور کرامر

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

مقادیر مجهولات x و y و z را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

که در آن Δ دترمینان ضرایب دستگاه و Δx و Δy و Δz دترمینانهای محذوفند:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

نکته:

با استفاده از دستور کرامر به سادگی می‌توان نشان داد که :

الف) اگر $\Delta \neq 0$ باشد دستگاه دارای یک دسته جواب برای مجهولات x و y و z است.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد و Δx و Δy و Δz مخالف صفر باشند، دستگاه مذکور فاقد جواب است و اصطلاحاً می‌گوییم دستگاه وضعیت غیر ممکن دارد یا ناسازگار است.

ج) اگر $\Delta z = \Delta y = \Delta x = \Delta = 0$ باشند دستگاه دارای بی شمار دسته جواب است و اصطلاحاً دستگاه وضعیت مبهم دارد. (بخاطر داشته باشید اگر $\Delta = 0$ ، صفر شدن یکی از دترمینانهای مخذوف، صفر شدن همه دترمینانهای مخذوف را نتیجه می‌دهد.)

مثال: مقدار z را از دستگاه معادلات زیر بیابید:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y+z=6 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$$

حل:

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&6\\3&-1&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\3&-1&1\end{vmatrix}}=\frac{1(6+6)-(12-18)+2(-2-3)}{1(1+1)-1(2-3)-1(-2-3)}=\frac{8}{8}=1$$

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید که دستگاه معادلات زیر فاقد جواب باشد.

$$\begin{cases}4x+2y-3z=1\\3x+y+2z=3\\kx+5y-4z=2\end{cases}$$

حل: باید $\Delta=0$

$$\Delta=0\Rightarrow\begin{vmatrix}4&2&-3\\3&1&2\\k&5&-4\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow 4(-4-10)-2(-12-2k)-3(15-k)=0$$

$$\Rightarrow -56+24+4k-45+3k=0\Rightarrow 7k=77\Rightarrow k=11$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases}2x+y+3z=1\\3x+2y-z=2\\kx+4y+5z=m\end{cases}$$

مقادیر k و m را طوری تعیین کنید تا دستگاه معادلات زیر فاقد جواب باشد.

حل: اولاً باید داشته باشیم $\Delta=0$

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&-1\\k&4&5\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow 2(10+4)-1(15+k)+3(12-2k)=0$$

$$\Rightarrow 28-15-k+36-6k=0\ \Rightarrow k=7$$

ثانیاً باید دترمینانهای محذوف مخالف صفر باشند.

$$\Delta x\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&3\\2&2&-1\\m&4&5\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ 1(10+4)-1(10+m)+3(8-2m)\neq 0$$

$$\Rightarrow\ 14-10-m+24-6m\neq 0\ \Rightarrow m\neq 4$$

بدیهی است اگر $m=4$ و $k=7$ باشد دستگاه بی شمار جواب دارد.

دستگاه معادلات خطی همگن

دستگاه معادلات خطی همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

به وضوح دیده می‌شود $x=y=z=0$ جوابی برای این دستگاه معادلات است که اصطلاحاً به آن جواب بدیهی دستگاه گفته می‌شود. شرط لازم و کافی برای آن که دستگاه فوق دارای جوابهای غیر بدیهی نیز باشد و به تعبیری دارای بینهایت دسته جواب باشد. آن است که دترمینان ضرایب دستگاه صفر شود یعنی:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

مثال : مقدار m را طوری بیابید تا دستگاه معادلات زیر دارای جوابهای غیر صفر نیز باشد.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-my+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

حل: باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -m & 1 \\ 1 & 1 & +2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1(-2m-1)-2(4-1)-1(2+m)=0$$

$$\Rightarrow -2m-1-6-2-m=0 \Rightarrow -3m=9 \Rightarrow m=-3$$

نکته : برخی مواقع یک دستگاه معادلات داده می‌شود که تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است در اینگونه موارد کافی است بسته به تعداد مجهولات داده شده از چند معادله دستگاه استفاده کرد و مجهولات مذکور را محاسبه کنید. حال چنانچه مجهولات بدست آمده تمامی معادلات دستگاه که هنوز از آنها استفاده ای نشده است را ارضا کند اصطلاحاً گوییم دستگاه مورد نظر سازگار بوده و مجهولات جواب دستگاه رانشان می‌دهند و چنانچه این اتفاق نیفتد اصطلاحاً گوییم دستگاه ناسازگار بوده و فاقد جواب است.

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که دستگاه $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ سازگار باشد.

حل:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

چون دستگاه سازگار است پس داریم :

$$x+ay=4 \Rightarrow 2+a=4 \Rightarrow a=2$$

یعنی جوابی که از دو معادله اول بدست آمده باید در معادله سومی نیز صدق کند تا دستگاه مورد نظر سازگار باشد.

« بسط دوجمله‌ای »

بسط دوجمله‌ای نیوتن

یک بسط دوجمله‌ای نیوتن بصورت زیر بیان می‌شود:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}.b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.b^2 + \cdots + b^n$$

یا $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^n + \cdots + \binom{n}{n}b^n$

در ارتباط با این بسط سه موضوع زیر را به خاطر داشته باشید:

۱- تعداد جملات این بسط $n+1$ جمله است.

۲- مجموع ضرایب جملات در بسط مذکور 2^n است و به طور کلی در هر بسط دوجمله‌ای برای محاسبه مجموع ضرایب جملات کافی است به جای حروف عدد 1 قرار دهیم .

۳- جمله $P+1$ در بسط دو جمله‌ای مذکور از رابطه زیر پیدا می‌شود:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p$$

که در آن $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال : در بسط دو جمله‌ای زیر : $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$

اولاً : مجموع ضرایب جملات را بیابید:

ثانیاً : جمله مستقل از x کدام است.

حل:

الف) مجموع ضرایب : $\left(1-\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9$

ب) جمله $P+1$ را می‌نویسیم

$$a = x^2 \quad , \quad b = \frac{-1}{2x} \quad , \quad n = 9$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}.(x^2)^{9-p}.\left(\frac{-1}{2x}\right)^p = \binom{9}{p}.x^{18-2p}.\left(-\frac{1}{2}\right)^p.\frac{1}{x^p} = \left(\frac{-1}{2}\right)^p\binom{p}{9}x^{18-3p}$$

اگر دنبال جمله مستقل از x هستیم باید توان x برابر صفر باشد.

$$18-3p=0 \Rightarrow p=6$$

پس جمله هفتم مستقل از x است.

و جمله مستقل از x چنین است:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^6\binom{9}{6}=\frac{1}{2^6}.\frac{9!}{3!.6!}=1.3125$$

مثال : مقدار n چقدر باشد تا مجموع ضرایب بسط دو جمله ای $\left(3\sqrt{x}-1\right)^{2n}$ به اندازه 240 واحد بیشتر از مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای $\left(x+\frac{1}{y}\right)^n$ باشد.

حل:

$\left(3\sqrt{x}-1\right)^{2n}$ مجموع ضرایب جملات در $\rightarrow \left(3\sqrt{1}-1\right)^{2n}=2^{2n}$

$\left(x+\frac{1}{y}\right)^n$ مجموع ضرایب جملات در $\rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^n=2^n$

$$\Rightarrow 2^{2n}=2^n+240 \xrightarrow{2^n=A} A^2=A+240 \Rightarrow A^2-A-240=0$$

$$\Rightarrow (A-16)(A+15)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=16 & \text{ق ق} \\ A=-15 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

داریم :

$$2^n=16 \Rightarrow n=4$$

مثال: در بسط دوجمله‌ای زیر مقدار α را طوری تعیین کنید که جمله پنجم بسط دارای $\frac{1}{x^2}$ باشد وسپس ضریب این جمله را پیدا کنید.

$$\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{x^\alpha}}\right)^7$$

حل:

در جمله پنجم $P+1=5$ و P برابر است با 4.

$$n=7\ ,\ b=\frac{1}{\sqrt{x^\alpha}}\ ,\ \ a=x^3$$

$$T_5=\binom{7}{4}.\left(x^3\right)^{7-4}.\left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^4=\binom{7}{4}.x^9.x^{-2\alpha}=\binom{7}{4}x^{9-2\alpha}$$

اگر قرار باشد جمله پنجم $\frac{1}{x^2}$ را داشته باشد باید $9-2\alpha=-2 \Rightarrow 9=2\alpha-2 \Rightarrow \alpha=\frac{11}{2}$

ضریب جمله پنجم : $\binom{7}{4}=\frac{7!}{3!\,4!}=35$

مثال: در بسط دوجمله‌ای $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$ چند جمله گویا وجود دارد.

حل:

$$a=\sqrt{2} \quad , \quad b=\sqrt[3]{3} \quad , \quad n=100$$

$$T_{p+1}=\binom{100}{P}.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{100-P}.\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{P}=\binom{100}{P}.2^{50-\frac{P}{2}}.3^{\frac{P}{3}}$$

بدیهی است اگر بخواهیم جملات گویا داشته باشیم این می‌طلبد در عبارت فوق هم توان 2 و هم توان 3 غیر کسری شود و به تعبیری P باید هم بر 2 و هم بر 3 بخش پذیر باشد یعنی باید P را مضربی از عدد 6 با شرط $0 \le P \le 100$ انتخاب کرد.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 6 \\ 96 & 16 \\ \hline 4 & \end{array}$$

پس تعداد جملات گویای بسط $16+1=17$ عدد است چون در تقسیم فقط مضربهای طبیعی در نظر گرفته شده است.در صورتی که صفر هم جزء مضربها ست.